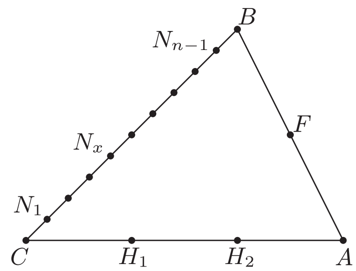
I. megoldás. Az ABC háromszög területét jelölje T. Fejezzük ki T, x és n segítségével az N_xFH_1 háromszögek és az N_xFH_2 háromszögek területét, ahol $x \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$.



A BC oldalt a-val jelölve: $CN_x = \frac{a}{n} \cdot x$ és $BN_x = \frac{a}{n}(n-x)$.

Mindkét háromszög területét T és három kisebb háromszög területösszegének különbségeként írhatjuk fel:

(1) $$T_{N_xFH_1\triangle} = T - \left(T_{AFH_1\triangle} + T_{BFN_x\triangle} + T_{CH_1N_x\triangle}\right),$$

(2) $$T_{N_xFH_2\triangle} = T - \left(T_{AFH_2\triangle} + T_{BFN_x\triangle} + T_{CH_2N_x\triangle}\right).$$

Írjuk fel a kis háromszögek területét (felhasználjuk, hogy ha két háromszögben a megfelelő két oldal által bezárt szög megegyezik, akkor a területek aránya az oldalak arányának a szorzatával egyenlő):

$$T_{AFH_1\triangle} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot T = \frac{T}{3},$$

$$T_{AFH_2\triangle} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot T = \frac{T}{6},$$

$$T_{BFN_x\triangle} = \frac{1}{2} \cdot \frac{n-x}{n} \cdot T = \frac{T(n-x)}{2n},$$

$$T_{CH_1N_x\triangle} = \frac{1}{3} \cdot \frac{x}{n} \cdot T = \frac{Tx}{3n},$$

$$T_{CH_2N_x\triangle} = \frac{2}{3} \cdot \frac{x}{n} \cdot T = \frac{2Tx}{3n}.$$

Ezeket (1)-be és (2)-be beírva kapjuk, hogy:

(1′) $$T_{N_xFH_1\triangle} = T\left(1 - \frac{1}{3} - \frac{n-x}{2n} - \frac{x}{3n}\right) = T \cdot \frac{n+x}{6n},$$

(2′) $$T_{N_xFH_2\triangle} = T\left(1 - \frac{1}{6} - \frac{n-x}{2n} - \frac{2x}{3n}\right) = T \cdot \frac{2n-x}{6n}.$$

Különböző x értékekre $T_{N_xFH_1\triangle}$ értéke is más lesz, és ugyanez igaz $T_{N_xFH_2\triangle}$ értékére is. Tehát az egyenlő területű háromszög-párokat csak így kereshetjük:

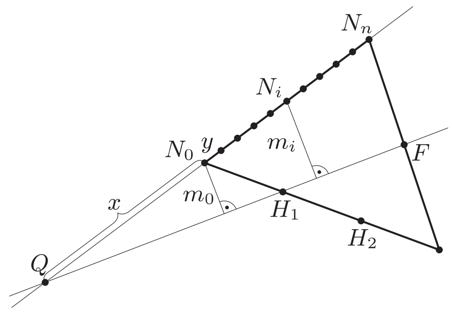
$$T_{N_xFH_1\triangle} = T_{N_yFH_2\triangle}, \quad \text{vagyis}$$

$$T \cdot \frac{n+x}{6n} = T \cdot \frac{2n-y}{6n}, \quad \text{ahonnan} \quad x + y = n.$$

Látható, hogy minden x értékhez pontosan egy y érték tartozik. Ezzel az állítást beláttuk.

II. megoldás. A harmadik oldal két végpontját jelölje N_0 és N_n. Feltehetjük, hogy a jelölések úgy vannak megválasztva, hogy az $N_0, N_1, \ldots, N_n$ pontok ebben a sorrendben követik egymást, továbbá H_1 éppen az N_0H_2 szakasz felezőpontja. Ekkor az N_iN_{i+1} szakaszok ($0 \le i < n$) mind egyenlő hosszúak, legyen ez a hossz y.

Ha a háromszög területe T, akkor az N_0H_1F és az N_nH_2F háromszögek területe egyaránt $\frac{T}{6}$, az N_0H_2F és N_nH_1F háromszögeké pedig $\frac{T}{3}$, hiszen ha két háromszögben a megfelelő két oldal által bezárt szög megegyezik, akkor a területek aránya az oldalak arányának a szorzatával egyenlő.



Jelölje m_i az N_iH_1F háromszög H_1F oldalhoz tartozó magasságát, Q az N_0N_n és a H_1F egyenes metszéspontját, és legyen $x = QN_0$. A párhuzamos szelők tétele szerint $\dfrac{m_i}{m_0} = \dfrac{x+iy}{x}$, amiből

$$m_i = m_0\left(1 + \frac{iy}{x}\right) = m_0 + \left(m_0 \cdot \frac{y}{x}\right) \cdot i.$$

Ebből pedig már következik, hogy az N_iH_1F háromszögek H_1F oldalhoz tartozó magassága egy $n+1$ hosszúságú növekvő számtani sorozatot alkot, melynek első tagja m_0, differenciája pedig $m_0 \cdot \dfrac{y}{x}$. Ennek megfelelően az N_iH_1F háromszögek területe egy olyan $n+1$ tagú növekvő számtani sorozatot alkot, melynek első eleme $\dfrac{T}{6}$, az utolsó pedig $\dfrac{T}{3}$. Legyen ez a sorozat a_n. Hasonlóképpen az N_iH_2F háromszögek területe egy olyan $n+1$ tagú csökkenő számtani sorozat, amelynek első eleme $\dfrac{T}{3}$, az utolsó pedig $\dfrac{T}{6}$. Legyen ez a sorozat b_n. A két számtani sorozat egyaránt $(n+1)$ tagból áll, $a_1 = b_{n+1}$, $b_1 = a_{n+1}$. Ezen két észrevételből adódik, hogy $a_i = b_{n+2-i}$, amiből már következik a feladat állítása.