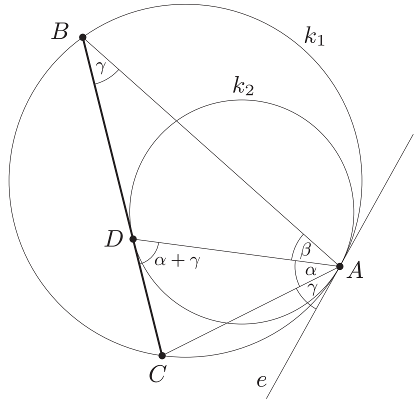
I. megoldás. Legyen e a két kör közös érintője, $CAD\sphericalangle = \alpha$, $BAD\sphericalangle = \beta$, $ABC\sphericalangle = \gamma$.



1. ábra

A kerületi szögek tételét felhasználva a CA ívhez tartozó γ kerületi szög megegyezik a CA húr és az e érintő által közbezárt érintő szárú kerületi szöggel. A $CDA\sphericalangle$ a k_2 körben a DA ívhez tartozó érintő szárú kerületi szög, ezért megegyezik a DA húr és az e érintő által bezárt $\alpha+\gamma$ nagyságú érintő szárú kerületi szöggel. Tehát az ABD háromszög D csúcsánál lévő külső szöge $\alpha+\gamma$, ez megegyezik a háromszög másik két csúcsánál lévő belső szögek összegével: $\alpha+\gamma=\beta+\gamma$. Így $\alpha=\beta$, ezt kellett bizonyítanunk.

II. megoldás. Vizsgáljuk először azt az esetet, amikor a k_2 kör A és D pontbeli érintője egy E pontban metszi egymást (*2. ábra*). Vezessük be az alábbi jelöléseket:

$$BAD\sphericalangle = \alpha_1, \quad DAC\sphericalangle = \alpha_2, \quad CBA\sphericalangle = \beta.$$

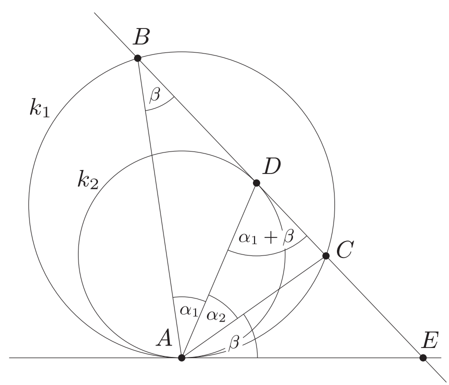
Ekkor $CBA\sphericalangle = CAE\sphericalangle = \beta$, mivel a k_1 körben, azonos AC húrhoz tartozó kerületi és érintőszárú kerületi szögek. Ezt felhasználva:

$$DAE\sphericalangle = DAC\sphericalangle + CAE\sphericalangle = \alpha_2 + \beta.$$

Az ADB háromszögre alkalmazva a külsőszög-tételt:

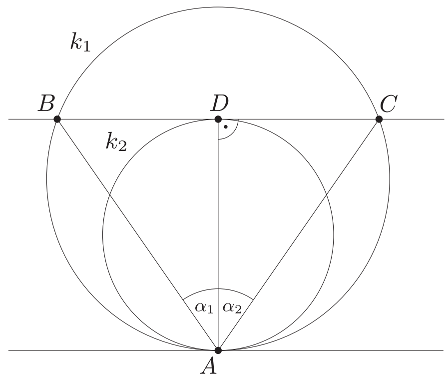
$$EDA\sphericalangle = BAD\sphericalangle + DBA\sphericalangle = \alpha_1 + \beta.$$

Mivel az E pontból a k_2 körhöz húzott érintőszakaszok egyenlő hosszúságúak, a DAE háromszög egyenlő szárú, és $EDA\sphericalangle = DAE\sphericalangle$, vagyis $\alpha_1+\beta=\alpha_2+\beta$, amiből $\alpha_1=\alpha_2$.



2. ábra

Abban az esetben, ha a k_2 kör A és D pontbeli érintője párhuzamos egymással, akkor az AD szakasz a k_2 kör egy átmérője, melynek egyenesére illeszkedik a két kör középpontja is (*3. ábra*). Az AD egyenes szimmetriatengelye a két körnek, és így az ABC egyenlő szárú háromszögnek is, vagyis az $\alpha_1=\alpha_2$ egyenlőség most is teljesül.

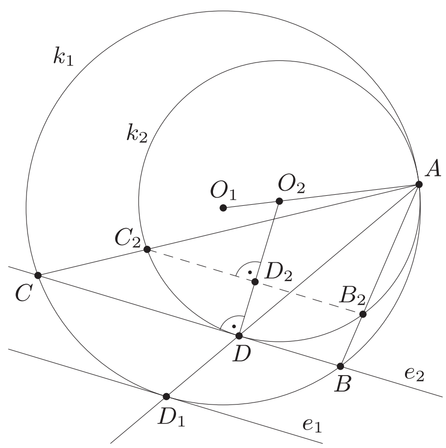


3. ábra

III. megoldás. Ha a k_2 kör belülről érinti a k_1 kört, akkor a közös érintési pont, A egy H középpontos hasonlósági transzformáció középpontja, mely a k_2 kört a k_1 körre képezi le.

Az AB szakasz a k_2 kört B_2-ben, az AC szakasz C_2-ben metszi.

A H traszformáció a B_2 pontot B-be, a C_2 pontot C-be, a D pontot pedig D_1-be viszi át, a k_2 kör e_2 érintőjének képe pedig a k_1 kör e_1 érintője.



4. ábra

Emiatt a B_2C_2 szakasz, az e_1 és e_2 érintők egymással párhuzamosak.

Az e_2 érintő a D érintési pontban merőleges az O_2D sugárra, így a B_2C_2 szakasz is merőleges az O_2D sugárra.

A B_2C_2 szakasz a k_2 körben húr, O_2D pedig a húr felező merőlegese, így a B_2D ív és a C_2D ív egyenlőek. Ezeket az íveket a H traszformáció a k_1 kör BD_1 és CD_1 íveibe képezi, tehát ezek is egyenlőek, vagyis az ezekhez tartozó A csúcsú kerületi szögek is egyenlőek a k_1 körben, tehát $CAD_1\sphericalangle = D_1AB\sphericalangle$, vagyis $CAD\sphericalangle = DAB\sphericalangle$, és ezt kellett bizonyítani.