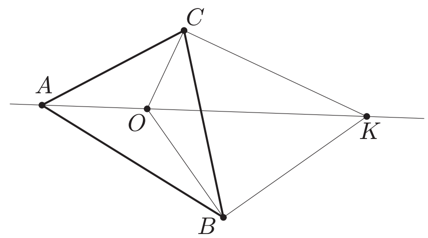
Megoldás. A háromszög szögeit a szokásos módon jelöljük.

I. megoldás. Először azt vizsgáljuk meg, hogy a $BKCO$ négyszög mikor lesz deltoid.



Ha egy négyszög deltoid, akkor két szemben fekvő szöge és két-két szomszédos oldala megegyezik. Ez utóbbira két lehetőség van.

Az első: $OB = OC$ és $KB = KC$. Ekkor a COB háromszög egyenlő szárú, így alapon fekvő szögei egyenlők: $BCO\sphericalangle = CBO\sphericalangle$. Mivel OB és OC szögfelezők, így ebből $ACB\sphericalangle = ABC\sphericalangle$ következik, tehát az ABC háromszögben $\gamma = \beta$, a háromszög egyenlő szárú.

Ha az ABC háromszög egyenlő szárú, akkor az A csúcshoz tartozó szögfelező egyben a BC oldal felező merőlegese is, és mivel O és K is ezen a felező merőlegesen van, $OB = OC$ és $KB = KC$, a négyszög deltoid.

A másik lehetőség: $OC = KC$, $OB = KB$ és $COB\sphericalangle = CKB\sphericalangle$. Mivel egy szög külső és belső szögfelezői merőlegesek egymásra, $OCK\sphericalangle = OBK\sphericalangle = 90°$, és így:

$$COB\sphericalangle = CKB\sphericalangle = \frac{360° - (90° + 90°)}{2} = 90°.$$

A COB háromszögben $OBC\sphericalangle = \beta/2 = 180° - (90° + \gamma/2)$, amiből $\beta + \gamma = 180°$ következik, ez azonban háromszög esetén lehetetlen.

Ha a $BKCO$ négyszög téglalap, akkor összes szöge, így a $COB\sphericalangle$ is derékszög, ami a fentiek miatt nem lehetséges.

Összefoglalva: a négyszög pontosan akkor deltoid, ha $AB = AC$, és sohasem téglalap.

Másik bizonyítás arra, hogy deltoid esetén a háromszög szükségképpen egyenlő szárú.

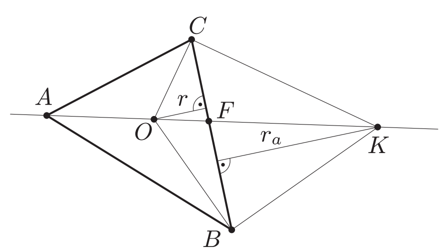
Ha a $BKCO$ négyszög deltoid, akkor átlói merőlegesek egymásra, vagyis $CB \perp OK$. Mivel OK az α szögfelezőjére illeszkedik ez azt jelenti, hogy BC merőleges az α szögfelezőjére, így a háromszög egyenlő szárú.

II. megoldás arra, hogy a négyszög sosem lesz téglalap.

Ismert, hogy a hozzáírt kör sugara nagyobb a beírt kör sugaránál. Ez következik például Kiss György: *Amit jó tudni a háromszögekről* c. cikkének[1] a 8. állításából, mely szerint

$$T = r \cdot s = r_a(s-a) = r_b(s-b) = r_c(s-c)$$

(ahol például r_a az a oldalhoz írt kör sugarát, r pedig a beírt kör sugarát jelöli).



Ha a $BKCO$ négyszög téglalap, akkor az átlói által meghatározott négy háromszög egybevágó, tehát ekkor $OFC\triangle \cong KFB\triangle$. Ha két háromszög egybevágó, akkor megfelelő szakaszaik egyenlő hosszúak, így például az FC és az FB oldalhoz tartozó magasságok megegyeznek. Ez a két magasság a beírt és a hozzáírt kör sugara: $r = r_a$, ami ellentmond a fenti állításnak. A négyszög tehát nem lehet téglalap.

[1] `http://www.komal.hu/cikkek/kissgy/haromszogekrol/amitjotudni.h.shtml`