I. megoldás. A kifejezés értelmezési tartománya: $2 \le x \le 3$.

Alkalmazzuk a számtani és a négyzetes közepek közötti összefüggést:

$$\frac{\sqrt{x-2}+\frac{1}{2}\sqrt{3-x}+\frac{1}{2}\sqrt{3-x}+\frac{1}{2}\sqrt{3-x}+\frac{1}{2}\sqrt{3-x}}{5} \le \sqrt{\frac{x-2+\frac{1}{4}(3-x)\cdot 4}{5}},$$

$$\frac{\sqrt{x-2}+2\sqrt{3-x}}{5} \le \sqrt{\frac{1}{5}},$$

aminek mindkét oldalát 5-tel megszorozva:

$$\sqrt{x-2}+2\sqrt{3-x} \le \sqrt{5};$$

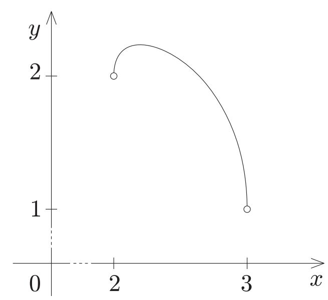
egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $\sqrt{x-2}=\dfrac{1}{2}\sqrt{3-x}$. Az egyenlet megoldása $x=\dfrac{11}{5}$, ami eleme az értelmezési tartománynak.

Tehát a kifejezés $x=\dfrac{11}{5}$-nél veszi fel a maximumát, melynek értéke $\sqrt{5}$.

II. megoldás. Legyen

$$f(x)=\sqrt{x-2}+2\sqrt{3-x}=\sqrt{x-2}+\sqrt{12-4x}.$$

A függvény csak a $2 \le x \le 3$ tartományon értelmezett.



A szélsőérték meghatározásához deriváljuk a függvényt. Mivel deriválni csak nyílt intervallumon lehet, a kifejezést vizsgáljuk a $2<x<3$ tartományon, majd a 2, illetve a 3 helyen.

Szélsőérték ott lehet, ahol a derivált értéke 0. A függvény deriváltja:

$$f'(x)=\frac{1}{2}\cdot(x-2)^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}\cdot(12-4x)^{-\frac{1}{2}}\cdot(-4)=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{x-2}}-\frac{2}{\sqrt{12-4x}}=\frac{1}{2\sqrt{x-2}}-\frac{1}{\sqrt{3-x}}.$$

A két törtet közös nevezőre hozva:

$$f'(x)=\frac{\sqrt{3-x}-2\sqrt{x-2}}{2\sqrt{x-2}\cdot\sqrt{3-x}}.$$

Mivel nyílt intervallumban vagyunk, a nevező nem lehet nulla. A számláló pedig akkor 0, ha $\sqrt{3-x}=2\sqrt{x-2}$, vagyis $3-x=4x-8$, és így $x=2{,}2$. Ekkor $f(2{,}2)=\sqrt{2{,}2-2}+2\sqrt{3-2{,}2}=\sqrt{0{,}2}+2\sqrt{0{,}8}=\sqrt{5}$.

Vizsgáljuk meg a derivált előjelét a $(2;3)$ intervallumban, illetve f értékét a 2 és a 3 helyen.

x	$2<x<2{,}2$	$x=2{,}2$	$2{,}2<x<3$
f'	>0	0	<0
f	$\nearrow$	$\sqrt{5}$	$\searrow$

A függvénynek tehát a $(2;3)$ intervallumon az $x=2{,}2$ helyen maximuma van.

A kifejezés értékét vizsgálnunk kell még az $x=2$ és az $x=3$ helyeken, ahol 2, illetve 1 az értéke. Mivel mind a kettő kisebb, mint $\sqrt{5}$, az f függvény maximumhelye az $x=2{,}2$, és a maximum értéke $\sqrt{5}$.

Megjegyzés. Sokan megfeledkeztek arról, hogy a $[2;3]$ intervallum végpontjaiban felvett f értékeket is meg kell vizsgálni.

III. megoldás. $\sqrt{x-2}+2\sqrt{3-x}$ értelmezési tartománya $[2;3]$. Vegyük észre, hogy

$$\left(\sqrt{x-2}\right)^2+\left(\sqrt{3-x}\right)^2=x-2+3-x=1,$$

ami azt jelenti, hogy van olyan β hegyesszög, amelyre $\sqrt{x-2}=\sin\beta$ és $\sqrt{3-x}=\cos\beta$, tehát

$$\sqrt{x-2}+2\sqrt{3-x}=\sin\beta+2\cos\beta=\sqrt{5}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\sin\beta+\frac{2}{\sqrt{5}}\cos\beta\right).$$

Az $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2+\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2=1$ összefüggés miatt van olyan α hegyesszög, amelyre $\frac{1}{\sqrt{5}}=\cos\alpha$ és $\frac{2}{\sqrt{5}}=\sin\alpha$. Ezt felhasználva a kifejezés a következőképpen írható:

$$\sqrt{5}(\cos\alpha\sin\beta+\sin\alpha\cos\beta)=\sqrt{5}\sin(\alpha+\beta).$$

A szinusz függvény hegyesszögek esetén akkor veszi fel a legnagyobb értékét, vagyis 1-et, ha $\alpha+\beta=90^\circ$, azaz $\beta=90^\circ-\alpha$. Ekkor

$$\sqrt{x-2}=\sin\beta=\sin(90^\circ-\alpha)=\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Innen kiszámolható x értéke: $\sqrt{x-2}=\frac{1}{\sqrt{5}}$, tehát $x-2=\frac{1}{5}$, és így $x=2+\frac{1}{5}$.

A kifejezés legnagyobb értéke:

$$\sqrt{2+\frac{1}{5}-2}+2\sqrt{3-2-\frac{1}{5}}=\sqrt{\frac{1}{5}}+2\sqrt{\frac{4}{5}}=\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{4}{\sqrt{5}}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}.$$

IV. megoldás. Vezessük be a következő vektorokat:

$$\mathbf{a}=(1;2),\qquad \mathbf{b}=\left(\sqrt{x-2};\sqrt{3-x}\right).$$

A két vektor által bezárt szöget γ-val jelölve írjuk fel kétféleképpen a skaláris szorzatukat:

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\cdot\cos\gamma=1\cdot\sqrt{x-2}+2\cdot\sqrt{3-x}.$$

Mivel $\cos\gamma\le 1$, azért $|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\ge 1\cdot\sqrt{x-2}+2\cdot\sqrt{3-x}$. Mivel $|\mathbf{a}|=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$, $|\mathbf{b}|=\sqrt{x-2+3-x}=1$, azért azt kaptuk, hogy

$$\sqrt{5}\cdot 1\ge\sqrt{x-2}+2\cdot\sqrt{3-x}.$$

Tehát a kifejezés legnagyobb értéke $\sqrt{5}$.

Számoljuk ki, hogy ezt milyen x esetén veszi föl.

$$\sqrt{x-2}+2\cdot\sqrt{3-x}=\sqrt{5},$$

amit négyzetre emelve és rendezve:

$$3x-5=4\cdot\sqrt{x-2}\cdot\sqrt{3-x}.$$

Ezt ismét négyzetre emelve és rendezve:

$$0=25x^2-110x+121=(5x-11)^2.$$

Tehát a kifejezés $x=\frac{11}{5}$ esetén veszi fel a legnagyobb értékét.

V. megoldás. A $\sqrt{x-2}+2\sqrt{3-x}$ kifejezés értelmezési tartománya $2\le x\le 3$. Excel-ben kirajzolva megsejthető, hogy a függvény az $x=2{,}2$ helyen veszi fel a maximumát. (2-től 3-ig 0,001 lépésközzel ezer értékre számoltuk ki a kifejezést, majd az adatokból megrajzolt ábrán megsejthető $x=2{,}2$ környékén a táblázatban is megnéztük a kapott számokat.)

Be kell még látnunk, hogy $\sqrt{x-2}+2\sqrt{3-x}\le\sqrt{0{,}2}+2\sqrt{0{,}8}$. Mindkét oldal nemnegatív, ezért négyzetre emelhetünk:

$$x-2+12-4x+4\sqrt{x-2}\cdot\sqrt{3-x}\le 0{,}2+3,2+4\sqrt{0{,}2}\cdot\sqrt{0{,}8},$$

$$4\sqrt{x-2}\cdot\sqrt{3-x}\le -5+3x.$$

A bal oldal pozitív és $x\ge 2$ esetén a jobb oldal is az, ezért ismét négyzetre emelhetünk:

$$16\cdot(3x+2x-x^2-6)\le 9x^2-30x+25,$$

$$0\le 25x^2-110x+121=(5x-11)^2.$$

Ez pedig mindig teljesül, és a lépéseket visszafele is elvégezhetjük (a közben tett megjegyzések miatt).

Tehát beláttuk, hogy a kifejezés valóban $x=2{,}2$-nél veszi fel a legnagyobb értékét, ami $\sqrt{0{,}2}+2\sqrt{0{,}8}\approx 2{,}236$.