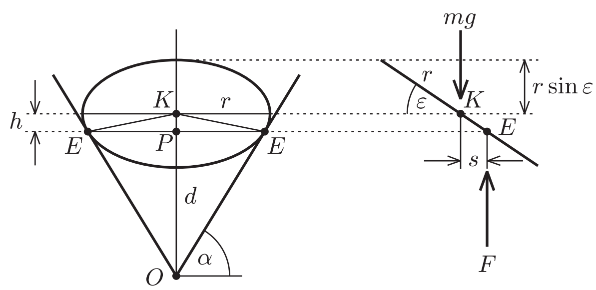
Megoldás. Ha a korong (kezdetben függőleges) tengelye kicsiny ε szöggel elfordul, akkor a korong K középpontja az eredeti helyzetéhez képest egy kicsit megemelkedik, a korong és a lejtők E érintkezési pontjai pedig mélyebbre kerülnek. Ezt a helyzetet mutatja az *1. ábra*, melynek bal oldala a lejtőkkel párhuzamos irányú nézetet, a jobb oldala pedig az erre merőleges vízszintes irányú (vagyis a pillanatnyi forgástengely irányából látható) nézetet ábrázolja.



1. ábra

A korongra az mg gravitációs erőn kívül az E pontokban összesen F nagyságú, függőlegesen felfelé irányuló kényszererő hat. (A korong tömegközéppontjának vízszintes irányú elmozdulása kis szögelfordulások esetén elhanyagolhatóan kicsi.) A korong függőleges irányú elmozdulása (és így a rezgőmozgás során a függőleges irányú sebessége és gyorsulása is) ε-nal arányosan kicsi, jó közelítéssel igaz tehát, hogy $F \approx mg$.

A korong rezgéseinek periódusidejét a forgómozgás alapegyenletéből határozhatjuk meg. Az F erő forgatónyomatéka a tömegközépponton átmenő (EE-vel párhuzamos) tengelyre

$$M = -Fs \approx -mgs = -mg\frac{h}{\operatorname{tg}\varepsilon}, \tag{1}$$

ahol h a korong K középpontjának és az E érintkezési pontoknak a magasságkülönbsége (lásd az 1. ábrát). Ha az M forgatónyomaték a szögkitéréssel egyenesen arányos, vagyis

$$M = -D^\star\varepsilon \tag{2}$$

alakba írható, akkor az ε szög periodikusan, az időnek szinuszos függvényeként fog változni. A billegés periódusideje az $M = \Theta\beta$ mozgásegyenlet és a harmonikus rezgőmozgás $F = ma$ egyenletének alaki hasonlóságából

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\Theta}{D^\star}}, \tag{3}$$

ahol

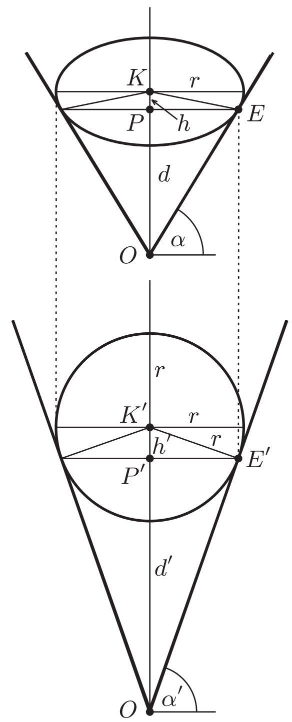
$$\Theta = \frac{1}{4}mr^2 \tag{4}$$

a korong tehetetlenségi nyomatéka az egyik átmérőjére vonatkoztatva (lásd a Függvénytáblázatot, vagy „A tehetetlenségi nyomatékról" című cikket lapunk 38. oldalán).

Hátra van még a h magasságkülönbség meghatározása; ez tulajdonképpen egy geometriai feladat. A korong oldalnézeti (a lejtők érintkező alsó széleinek irányából látható) képe egy olyan ellipszis, amelynek fél nagytengelye r, fél kistengelye pedig $r\sin\varepsilon$ hosszúságú. Ha ezt az ellipszist a kistengelye mentén $\frac{1}{\sin\varepsilon}$ arányban megnyújtjuk, akkor egy r sugarú kört kapunk. Ugyanilyen arányban megnyújtva a lejtőket ábrázoló OE egyeneseket is, a transzformáció (ún. *affin transzformáció*) az ellipszist érintő egyeneseket a kört érintő egyenesekbe viszi át (*2. ábra*). Az affinitás során az OK-ra merőleges méretek változatlanok maradnak, az OK-val párhuzamos méretek pedig ugyanolyan, nevezetesen

$$\frac{d'}{d} = \frac{h'}{h} = \frac{\operatorname{tg}\alpha'}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{1}{\sin\varepsilon}$$

arányban nyúlnak.



2. ábra

Másrészt a $K'P'E'$ és az $OE'P'$ háromszögek hasonlóságából

$$h' = r\,\cos\alpha' = \frac{r}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha'}} = \frac{r}{\sqrt{1+\frac{\operatorname{tg}^2\alpha}{\sin^2\varepsilon}}} = \frac{r\sin\varepsilon}{\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha+\sin^2\varepsilon}},$$

illetve a

$$h = h'\sin\varepsilon \qquad \text{és} \qquad s = \frac{h}{\operatorname{tg}\varepsilon}$$

összefüggésekből kapjuk:

$$s = r\frac{\sin\varepsilon\,\cos\varepsilon}{\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha+\sin^2\varepsilon}} \approx \frac{r}{\operatorname{tg}\alpha}\,\varepsilon.$$

(Kihasználtuk, hogy ε kicsi, emiatt $\sin\varepsilon \approx \operatorname{tg}\varepsilon \approx \varepsilon$.) Ezt (1)-be helyettesítve leolvashatjuk, hogy a visszatérítő nyomaték valóban (2) alakú és $D^\star = \dfrac{mgr}{\operatorname{tg}\alpha}$, a periódusidő tehát (3) és (4) felhasználásával

$$T = \pi\sqrt{\frac{r}{g}\operatorname{tg}\alpha}.$$