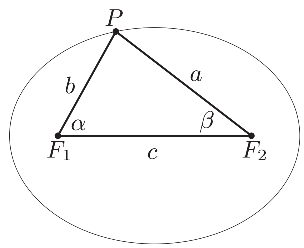
I. megoldás. Legyen a PF_1F_2 háromszög három oldala a, b és c, kerülete $a+b+c=2s$, szögei pedig α, β és γ (lásd az *ábrát*). Ismert (lásd pl. Kiss Gy.: *Amit jó tudni a háromszögekről,* KöMaL 2002/3, 130–139. old.), hogy

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}} \quad \text{és} \quad \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{s(s-b)}},$$

így

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}\cdot\sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{s(s-b)}}=\frac{s-c}{s}.$$



Az ellipszis definíciója szerint $PF_1+PF_2=a+b$ állandó, és mivel $F_1F_2=c$ rögzített, azért

$$\frac{s-c}{s}=\frac{a+b-c}{a+b+c}$$

is állandó.

A feladatban szereplő

$$\operatorname{tg}\frac{PF_1F_2\sphericalangle}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{PF_2F_1\sphericalangle}{2}$$

kifejezés értéke valóban nem függ P-től.

II. megoldás. Használjuk az I. megoldás jelöléseit, legyen továbbá $2x=PF_1F_2\sphericalangle=\alpha$, $2y=PF_2F_1\sphericalangle=\beta$ és $2z=F_2PF_1\sphericalangle=\gamma$, ekkor $x+y=90^\circ-z$. Ha a szóban forgó mennyiséget u-val jelöljük, akkor, mivel $u\neq 0$,

$$\frac{1}{u}-1=\operatorname{ctg}x\cdot\operatorname{ctg}y-1=\frac{\cos x\cos y}{\sin x\sin y}-1=\frac{\cos(x+y)}{\sin x\sin y}>0,$$

vagyis

$$\frac{u}{1-u}=\frac{\sin x\sin y}{\sin z}.$$

Mivel $a+b$ és c csak az adott ellipszistől függ, $\dfrac{a+b}{c}$ állandó. A szinusztétel szerint tehát

$$t=\frac{a+b}{c}=\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\sin\gamma}=\frac{2\sin(x+y)\cos(x-y)}{2\sin z\cos z}=\frac{\cos x\cos y+\sin x\sin y}{\sin z}$$

értéke is független P-től. Mivel $\sin z=\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y$, kapjuk, hogy

$$0<t=1+2\frac{\sin x\sin y}{\sin z}=1+2\frac{u}{1-u}=\frac{1+u}{1-u}.$$

Ebből pedig következik, hogy $u=\dfrac{t-1}{t+1}$ értéke valóban csak az ellipszistől függ, a P helyzetétől nem.