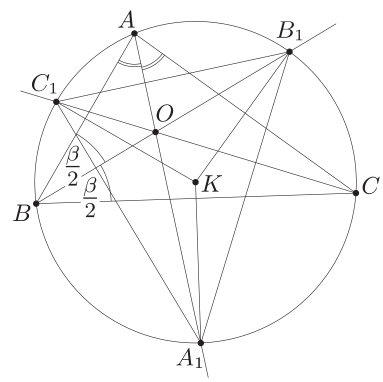
Megoldás. Ismert, hogy bármely háromszög területe kiszámítható az $\frac{R^2}{2} \cdot (\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma)$ formában, ahol R a körülírt kör sugara, α, β, γ pedig a háromszög belső szögei. A formula könnyen bizonyítható, ha a háromszög területét azon három háromszög területének összegeként írjuk fel, melyeket a körülírt kör középpontját a csúcsokkal összekötő szakaszok alakítanak ki a háromszög oldalaival. Ezekre a háromszögekre külön-külön írjuk fel a jól ismert $t = \frac{ab \sin \gamma}{2}$ területképletet, valamint felhasználjuk, hogy egy adott ívhez tartozó középponti szög kétszerese az ugyanezen ívhez tartozó kerületi szögnek.



A csúcsokat a beírt kör középpontjával összekötő egyenesek nyilván a szögfelezők lesznek. Mivel egyenlő kerületi szögekhez egyenlő ívek tartoznak, az A_1C és az A_1B ívek egyenlők. Ugyanígy a B_1A ív is egyenlő a B_1C ívvel és a C_1A ív is egyenlő a C_1B ívvel. Mivel a két ív összegéhez tartozó kerületi szög egyenlő a két ívhez tartozó kerületi szögek összegével, azért

$$\alpha_1 = \frac{\beta + \gamma}{2}, \quad \beta_1 = \frac{\alpha + \gamma}{2}, \quad \gamma_1 = \frac{\alpha + \beta}{2},$$

ahol α_1, β_1 és γ_1 az $A_1B_1C_1$ háromszög belső szögei. Az $A_1B_1C_1$ háromszögnek ugyanaz a körülírt köre, mint az ABC háromszögnek, ezért körülírt körük sugara is egyenlő. Így az $A_1B_1C_1$ háromszög területe az iménti képlet alapján:

$$\frac{R^2}{2} \cdot (\sin 2\alpha_1 + \sin 2\beta_1 + \sin 2\gamma_1).$$

Ez – a háromszög belső szögei közti összefüggést, a szinuszfüggvény tulajdonságait és a fentieket is figyelembe véve – a következőképpen alakítható át:

$$\begin{aligned}
T &= \frac{R^2}{2} \cdot (\sin 2\alpha_1 + \sin 2\beta_1 + \sin 2\gamma_1) = \\
&= \frac{R^2}{2} \cdot \big(\sin(\beta + \gamma) + \sin(\alpha + \gamma) + \sin(\alpha + \beta)\big) = \\
&= \frac{R^2}{2} \cdot \big(\sin(180^\circ - \alpha) + \sin(180^\circ - \beta) + \sin(180^\circ - \gamma)\big) = \\
&= \frac{R^2}{2} \cdot (\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma).
\end{aligned}$$

Ezzel a feladat állítását beláttuk.

Megjegyzés. Az $A_1B_1C_1$ háromszög belső szögeinek kiszámítása után látható, hogy az $A_1B_1C_1$ háromszög bármilyen ABC háromszög esetén hegyesszögű.