Megoldás.

Alapvető összefüggések

2.1. A lyukkamerával készített képen az $\tilde{x}$ helyen látható rúddarabkát kirajzoló fény $T = \dfrac{\sqrt{D^2+\tilde{x}^2}}{c}$ idővel korábban indult, mint a felvétel készítésének időpontja. Ennyi idő alatt a rúd vT távolságot tesz meg, tehát a felvétel készítésekor a rúd valódi helyzete: $x = \tilde{x} + \beta\sqrt{D^2+\tilde{x}^2}$.

2.2. A fenti egyenletből $\tilde{x}$ így fejezhető ki: $\tilde{x} = \gamma^2 x - \beta\gamma\sqrt{D^2+(\gamma x)^2}$.

A rúd látszólagos hossza

2.3. A Lorentz-kontrakciónak megfelelően a mozgó rúd hossza L/γ, így a mozgó rúd két végének valódi helyzete:

$$x_\pm = x_0 \pm \frac{L}{2\gamma},$$

ahol a pozitív jel a rúd elejének, a negatív pedig a végének felel meg.

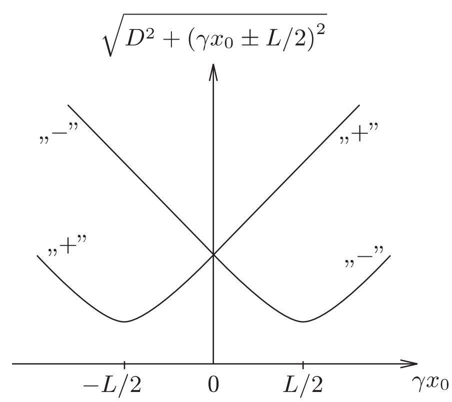
A lyukkamera képe a rúd két végét a

$$\tilde{x}_\pm = \gamma\left(\gamma x_0 \pm \frac{L}{2}\right) - \beta\gamma\sqrt{D^2+\left(\gamma x_0 \pm \frac{L}{2}\right)^2}$$

helyeken mutatja. Így a rúd $\tilde{L} = \tilde{x}_+ - \tilde{x}_-$ látszólagos hossza

$$\tilde{L} = \gamma L + \beta\gamma\sqrt{D^2+\left(\gamma x_0 - \frac{L}{2}\right)^2} - \beta\gamma\sqrt{D^2+\left(\gamma x_0 + \frac{L}{2}\right)^2}.$$

2.4. Mivel a rúd állandó v sebességgel mozog, azaz $\dfrac{dx_0}{dt} = v$, így a rúd látszólagos hosszára vonatkozó kérdés azt jelenti, hogy az $\tilde{L}$ mennyiség növekszik vagy csökken, ha x_0 növekszik. A rúd látszólagos hosszát mutató kifejezésben szereplő két négyzetgyökös tagot a *2. ábra* mutatja vázlatosan.



2. ábra

A „−”-os és a „+”-os négyzetgyökös kifejezések különbségéről világosan látszik, hogy ez a különbség folyamatosan csökken, miközben x_0 növekszik. Tehát az $\tilde{L}$ látszólagos hossz az idő függvényében folyamatosan csökken.

Szimmetrikus kép

2.5. Szimmetria okokból a rúd látszólagos hossza a szimmetrikus képen megegyezik a rúdnak a lyukkamera koordináta-rendszerében mért „valódi” hosszával, mert a rúd két végéről egyszerre elinduló fény egyszerre ér a lyukkamerába. Ennek megfelelően $\tilde{L} = L/\gamma$ (ami természetesen különbözik a rúd nyugalmi rendszerében észlelt L hossztól).

2.6. Ebben az esetben a rúd végpontjainak látszólagos helyzetére érvényes az $\tilde{x}_- = -\tilde{x}_+$ összefüggés, amit így is kifejezhetünk:

$$0 = \tilde{x}_+ + \tilde{x}_- = 2\gamma^2 x_0 - \beta\gamma\sqrt{D^2+\left(\gamma x_0 + \frac{L}{2}\right)^2} - \beta\gamma\sqrt{D^2+\left(\gamma x_0 - \frac{L}{2}\right)^2}.$$

Hasonlítsuk össze ezt a kifejezést a szimmetrikus helyzetű rúd hosszával:

$$\frac{L}{\gamma} = \tilde{x}_+ - \tilde{x}_- = \gamma L - \beta\gamma\sqrt{D^2+\left(\gamma x_0 + \frac{L}{2}\right)^2} + \beta\gamma\sqrt{D^2+\left(\gamma x_0 - \frac{L}{2}\right)^2}.$$

Észrevehetjük, hogy a négyzetgyökös tagok kifejezhetők:

$$\sqrt{D^2+\left(\gamma x_0 \pm \frac{L}{2}\right)^2}=\frac{2\gamma^2 x_0 \pm \left(\gamma L-\frac{L}{\gamma}\right)}{2\beta\gamma}=\frac{\gamma x_0}{\beta} \pm \frac{\beta L}{2}.$$

Akár a „+”, akár a „−” előjelű változatot választjuk, ugyanarra az eredményre jutunk:

$$x_0=\beta\sqrt{D^2+\left(\frac{L}{2\gamma}\right)^2}.$$

2.7. A szimmetrikus képen a rúd középpontjának látszólagos helyzetét a **2.2.** alkérdésre adott válasz alapján számíthatjuk ki:

$$\tilde{x}_0=\gamma^2 x_0-\beta\gamma\sqrt{D^2+(\gamma x_0)^2}=\beta\gamma\left(\sqrt{(\gamma D)^2+\left(\frac{L}{2}\right)^2}-\sqrt{(\gamma D)^2+\left(\frac{\beta L}{2}\right)^2}\right).$$

A középpont a rúd elejének képétől $l=\tilde{x}_+-\tilde{x}_0=\dfrac{L}{2\gamma}-\tilde{x}_0$ távolságra van, amiből

$$l=\frac{L}{2\gamma}-\beta\gamma\sqrt{(\gamma D)^2+\left(\frac{L}{2}\right)^2}+\beta\gamma\sqrt{(\gamma D)^2+\left(\frac{\beta L}{2}\right)^2},$$

ami így is felírható:

$$l=\frac{L}{2\gamma}\left(1-\frac{\frac{\beta L}{2}}{\sqrt{(\gamma D)^2+\left(\frac{L}{2}\right)^2}+\sqrt{(\gamma D)^2+\left(\frac{\beta L}{2}\right)^2}}\right).$$

Nagyon korai és nagyon késői képek

2.8. A nagyon korai képek x_0 nagyon nagy negatív értékeihez tartoznak, így a nagyon korai képeken a rúd látszólagos hossza:

$$\tilde{L}_{\text{korai}}=\tilde{L}(x_0\to-\infty)=(1+\beta)\gamma L=\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}\,L.$$

Ugyanígy a nagyon késői képek x_0 nagyon nagy pozitív értékeihez tartoznak, így a nagyon késői képeken a rúd látszólagos hossza:

$$\tilde{L}_{\text{késői}}=\tilde{L}(x_0\to+\infty)=(1-\beta)\gamma L=\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}\,L.$$

A kifejezésekből következik, hogy $\tilde{L}_{\text{korai}}>\tilde{L}_{\text{késői}}$, tehát a 3 méteres látszólagos kép korai, míg az 1 méteres késői kép.

Megjegyzés. Az utolsó három részfeladat a múlt havi számunkból tévedésből kimaradt; ezek kérdéseit most pótoljuk. (A szerk.)

2.9. (*1 pont*) *Határozd meg a rúd v sebességét!*

Az előző kifejezésekből a $\beta=\dfrac{v}{c}$ arány kifejezhető:

$$\beta=\frac{\tilde{L}_{\text{korai}}-\tilde{L}_{\text{késői}}}{\tilde{L}_{\text{korai}}+\tilde{L}_{\text{késői}}},$$

vagyis $\beta=\dfrac{1}{2}$, tehát $v=\dfrac{c}{2}$.

2.10. (*0,6 pont*) *Határozd meg a nyugvó rúd L hosszát!*

A sebességarányhoz hasonlóan határozható meg γ is:

$$\gamma=\frac{\tilde{L}_{\text{korai}}+\tilde{L}_{\text{késői}}}{2\sqrt{\tilde{L}_{\text{korai}}\cdot\tilde{L}_{\text{késői}}}}=\frac{2}{\sqrt{3}}=1{,}155.$$

Ezzel kifejezhető a nyugvó rúd hossza: $L=\sqrt{\tilde{L}_{\text{korai}}\cdot\tilde{L}_{\text{késői}}}=1{,}73$ m.

2.11. (*0,4 pont*) *Számold ki a szimmetrikus képen látható rúd látszólagos hosszát!*

A **2.5.** alkérdésnek megfelelően a rúd látszólagos hossza a szimmetrikus képen:

$$\tilde{L}=\frac{2\tilde{L}_{\text{korai}}\cdot\tilde{L}_{\text{késői}}}{\tilde{L}_{\text{korai}}+\tilde{L}_{\text{késői}}}=1{,}5\text{ m}.$$