I. megoldás. Egy Δt ideig tartó fényimpulzus hossza $\Delta x = c\Delta t$, ahol c a vákuumbeli fénysebesség. A fényhullámvonulat helyének bizonytalansága körülbelül (nagyságrendileg) Δx, így a fotonjainak p impulzusa sem lehet pontosan meghatározott érték, hanem (a Heisenberg-féle $\Delta x \Delta p \gtrapprox \frac{h}{2\pi}$ összefüggés alapján)

$$\Delta p \approx \frac{h}{2\pi \Delta x} = \frac{h}{2\pi c \Delta t},$$

ahol h a Planck-állandó.

Másrészt a fotonok impulzusa a de Broglie-összefüggés szerint $p = \frac{h}{\lambda}$, és ennek bizonytalansága kifejezhető a hullámhossz-bizonytalansággal:

$$\Delta p = p_2 - p_1 = h\left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\right) = h\frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1 \lambda_2} \approx h\frac{\Delta\lambda}{\lambda^2}$$

(ahol λ_1 és λ_2 a legnagyobb és a legkisebb hullámhossz, λ pedig az átlagos fényhullámhossz a hullámvonulatban).

Δp kétféle kifejezését összevetve

$$\frac{h}{2\pi c \Delta t} \approx h\frac{\Delta\lambda}{\lambda^2},$$

a keresett hullámhossz-bizonytalanság tehát

$$\Delta\lambda \approx \frac{\lambda^2}{2\pi c \Delta t} \approx 40 \text{ nm}.$$

II. megoldás. A Heisenberg-féle határozatlansági reláció kevésbé ismert alakja:

$$\Delta E \cdot \Delta t \gtrapprox \frac{h}{2\pi},$$

ahol E egy részecske (jelen esetben egy foton) energiája, Δt pedig az az idő, ameddig megfigyeljük a részecskét (mérjük az energiáját), h pedig a Planck-állandó. Mivel a foton energiája az f frekvenciával $E = hf$ kapcsolatban áll, a foton frekvenciájának bizonytalansága

$$\Delta f = \frac{1}{2\pi \Delta t}.$$

Próbáljuk meg kifejezni a frekvencia bizonytalanságát a hullámhossz bizonytalanságával! Mivel $f = c/\lambda$, a differenciálszámítás összefüggései alapján

$$\frac{\Delta f}{\Delta\lambda} \approx -\frac{c}{\lambda^2},$$

innen (a bizonytalanság nagysága szempontjából lényegtelen negatív előjelet elhagyva)

$$\Delta\lambda \approx \Delta f \cdot \frac{\lambda^2}{c} = \frac{\lambda^2}{2\pi c \Delta t} \approx 4 \cdot 10^{-8} \text{ m}.$$

Megjegyzés. Mindkét megoldás a kvantumelmélet egyik alapösszefüggését, a Heisenberg-féle határozatlansági relációt használta fel. Ez azt sugallhatja, hogy a vizsgált jelenség (a véges ideig tartó fényhullám hullámhosszának bizonytalansága) alapvetően kvantumfizikai természetű. Ez azonban nem igaz! A klasszikus fizika akármelyik hullámformájára, pl. a hanghullámokra, vagy akár a vízhullámokra is érvényes a hullámhossz „bizonytalansága" és a hullámvonulat kiterjedése közötti $\Delta\lambda \cdot \Delta x \gtrapprox 1$ összefüggés.

Gondoljuk meg, hogyan tudjuk egy véges hosszúságú, de nagyjából egyenletesen hullámzó hullámvonulat hullámhosszát meghatározni! Megszámoljuk, a vonulatban hány hullámhegy található (legyen ez a szám n), és a hullámvonulat hosszát elosztjuk n-nel: $\lambda \approx \frac{\Delta x}{n}$.

Milyen pontossággal tudjuk így λ-t meghatározni? Ez azon múlik, hogy mennyire pontosan ismerjük n-et. A hullámvonulat széleinél (ahol a hullámok amplitúdója szinte nullává válik) egyre nehezebb megállapítani, hogy látunk-e még hullámhegyeket, n megszámolásánál tehát *néhányat,* mondjuk ± 1-et tévedhetünk. Ebből a hibából adódó hullámhosszbizonytalanságra fennáll:

$$\Delta\left(\frac{1}{\lambda}\right) = -\frac{\Delta\lambda}{\lambda^2} \approx \frac{1}{\Delta x} \cdot \Delta n \approx \pm\frac{1}{\Delta x}.$$

Innen

$$\Delta\lambda \approx \frac{\lambda^2}{\Delta x} = \frac{\lambda^2}{c\Delta t}.$$

Ez a kifejezés – 2π faktortól eltekintve – megegyezik a határozatlansági relációra alapozott számítás eredményével. Ez az eltérés azonban elfogadható, hiszen mindegyik megfontolást csak *nagyságrendi becslésnek* szabad tekintenünk. A képletek pontosabbá tételéhez egyértelműen meg kellene mondani, mit is jelent egy mennyiség bizonytalansága, határozatlansága. Ha ezt megtesszük, és a Heisenberg-relációt is ennek megfelelően pontosítjuk, a különböző megfontolások eredménye nem csak nagyságrendileg, hanem *számszerűen* is egyezni fog.