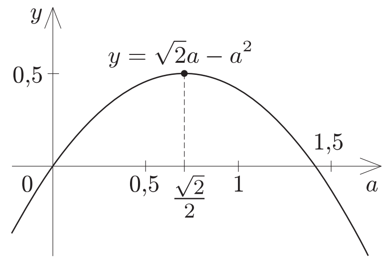
I. megoldás. Legyen $a = \sqrt{\sin x}$, vagyis a $\sqrt{2}a - a^2$ másodfokú kifejezést vizsgáljuk.



Megkeressük a zérushelyeit:

$$-a^2 + \sqrt{2}a = 0, \quad a\big(-a + \sqrt{2}\big) = 0.$$

Tehát a zérushelyek: $a_1 = 0$, $a_2 = \sqrt{2}$.

Mivel a^2 együtthatója negatív, azért a függvény a két zérushelyének számtani közepében veszi fel a maximumát, azaz

$$a = \sqrt{\sin x} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \sin x = \frac{1}{2}.$$

Ebből következik, hogy $x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k_1\pi$ $(k_1 \in \mathbb{Z})$, $x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2k_2\pi$ $(k_2 \in \mathbb{Z})$.

II. megoldás.

$$\sqrt{2\sin x} - \sin x = \sqrt{\sin x} \cdot \big(\sqrt{2} - \sqrt{\sin x}\big) \leq$$

$$\leq \left(\frac{\sqrt{\sin x} + \sqrt{2} - \sqrt{\sin x}}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}.$$

Felhasználtuk a számtani és mértani középre vonatkozó egyenlőtlenség négyzetre emelt alakját: $ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$, ahol egyenlőség $a = b$ esetén van.

A fenti kifejezés maximuma tehát $\frac{1}{2}$, és ezt akkor veszi fel, ha $\sqrt{\sin x} = \sqrt{2} - \sqrt{\sin x}$, amiből $\sin x = \frac{1}{2}$. Ebből következik, hogy a kifejezés értéke $x_1 = \frac{\pi}{6} + 2k_1\pi$ $(k_1 \in \mathbb{Z})$ és $x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2k_2\pi$ $(k_2 \in \mathbb{Z})$ esetén a legnagyobb.