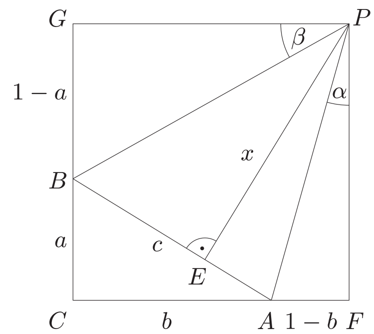
I. megoldás. Jelölje az ABC háromszög derékszögű csúcsát C. Ekkor a CA és CB oldalegyeneseket meghosszabbítva a háromszöget belehelyezhetjük egy egységnyi oldalhosszú $CGPF$ négyzetbe. Mivel a CP átló hossza $\sqrt{2}$, így P éppen a keresett pont, vagyis a BPA szöget kell meghatároznunk. (Megjegyzés: igazolható, hogy az ABC háromszög befogói 1 egységnél rövidebbek.)



Az ABC háromszög oldalait jelölje a szokásos módon a, b és c, továbbá a P pontból AB-re állított merőleges talppontját jelöljük E-vel, végül legyen $PE = x$ (lásd az *ábrát*). A négyzet területe egységnyi, így

$$\frac{xc}{2} + \frac{ab}{2} + \frac{1-a}{2} + \frac{1-b}{2} = 1.$$

Mivel a háromszög kerülete 2, azért

$$c = 2 - a - b.$$

Ezt az előző egyenletbe behelyettesítve kapjuk, hogy

$$x = \frac{a+b-ab}{2-a-b}.$$

A Pitagorasz-tétel alapján $a^2 + b^2 = c^2 = (2-a-b)^2$, a négyzetre emelés és az egyszerűsítés után ez az egyenlet $4 - 4a - 4b + 2ab = 0$ alakra hozható, amiből pedig $2 - a - b = a + b - ab$. Ezt a korábbi, x-re kapott összefüggésbe behelyettesítve $x = 1$-et kapunk.

Mivel $GP = EP = 1$, azért a PGB és PEB derékszögű háromszögek egybevágók. Hasonlóan belátható a PEA és PFA háromszögek egybevágósága is. Ebből következik, hogy $GPB\sphericalangle = BPE\sphericalangle$, illetve $EPA\sphericalangle = APF\sphericalangle$. Vagyis a BPA szög a GPF derékszög fele, azaz $BPA\sphericalangle = BPE\sphericalangle + EPA\sphericalangle = 45°$-os szögben látszik az átfogó a kérdéses pontból.

Megjegyzés. A $PG = PE = PF$ egyenlőségből kapjuk, hogy a P pont éppen a háromszög átfogójához hozzáírt kör középpontja. Ismeretes, hogy derékszögű háromszögben az átfogóhoz írt kör sugara egyenlő a félkerülettel – ami jelen esetben 1 egység –, az állítás lényegében a fenti megoldásban alkalmazott gondolatmenettel bizonyítható. Továbbá a külső pontból körhöz húzott érintőszakaszok hossza egyenlő, így $PGBE$ és $PEAF$ deltoidok, amiből szintén megkaphatjuk a feladat megoldását.

II. megoldás. Használjuk az előző megoldás ábráját, legyen továbbá $APF\sphericalangle = \alpha$ és $GPB\sphericalangle = \beta$. Az előző megoldásban igazolt $4 - 4a - 4b + 2ab = 0$ egyenletet átrendezve

$$a = \frac{2-2b}{2-b} = 2 - \frac{2}{2-b}.$$

Ekkor $AF = 1 - b$ és $BG = 1 - a = \dfrac{2}{2-b} - 1$. Továbbá

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1-b}{1}, \quad \text{valamint} \quad \operatorname{tg}\beta = \frac{\frac{2}{2-b} - 1}{1}.$$

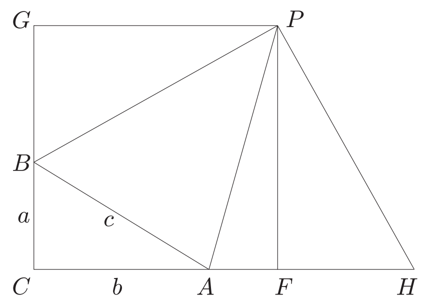
A tangensfüggvény addíciós képletét felhasználva

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} = \frac{(1-b) + \left(\dfrac{2}{2-b} - 1\right)}{1 - (1-b)\left(\dfrac{2}{2-b} - 1\right)} = \frac{(1-b)(2-b) + b}{(2-b) - (1-b)b} = 1.$$

Tehát $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = 1$, amiből $\alpha + \beta = 45°$. Mivel $BPA\sphericalangle = 90° - (\alpha+\beta) = 45°$, azért a keresett szög nagysága $45°$.

Megjegyzés. Szögfüggvények használatával egy másik megoldást is kaphatunk, ha először felírjuk a PBC és CAP háromszögek PB, illetve PA oldalára a koszinusztételt (innen $PB^2 = a^2 - 2a + 2$ és $PA^2 = b^2 - 2b + 2$ adódik), majd újból alkalmazzuk a koszinusztételt a PBA háromszög BA oldalára (amiből $\cos APB\sphericalangle = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ adja a végeredményt). Néhányan ugyanezt a megoldást koordináta-geometriai úton igazolták, ekkor az APB szög nagysága a $\overrightarrow{PA}$ és $\overrightarrow{PB}$ vektorok skaláris szorzatából számítható ki.

III. megoldás. Használjuk az előző megoldások jelöléseit. Forgassuk el a PGB háromszöget P körül pozitív irányban $90°$-kal. Mivel $PG = PF$, $GPF\sphericalangle = 90°$ és $PGB\sphericalangle + PFA\sphericalangle = 180°$, azért a forgatás után a PFH háromszöget kapjuk, amelynek H csúcsa rajta van az AF egyenesen.



Mivel $PA = PA$, $PB = PH$ (a forgatás miatt), valamint $AH = AF + FH = (1-b) + (1-a) = 2 - a - b = c = AB$, azért az APB és APH háromszögek egybevágók, ebből adódóan $BPA\sphericalangle = APH\sphericalangle$. A forgatás alapján $BPH\sphericalangle = 90°$, innen tehát $BPA\sphericalangle = \dfrac{90°}{2} = 45°$.