Megoldás. Pozitív egészek összege csak véges sokféleképpen lehet 2006, ezért a kérdéses összegnek létezik minimuma. Írjuk fel az összeget a következő alakban:

$$\binom{a_1}{2}+\ldots+\binom{a_{10}}{2}=\frac{a_1^2-a_1}{2}+\ldots+\frac{a_{10}^2-a_{10}}{2}=\frac{a_1^2+\ldots a_{10}^2}{2}-1003.$$

Innen látható, hogy elegendő a négyzetösszeg legkisebb értékét megtalálni. Legyen az a_i számok közül hatnak az értéke 201, a többi négyé pedig 200; ez a feladat feltételeit kielégítő egyetlen olyan megoszlás, amikor a tíz szám közül bármelyik kettőnek a különbsége legfeljebb 1. Megmutatjuk, hogy minden más esetben a számokat a feltételek keretein belül meg tudjuk változtatni úgy, hogy a négyzetösszegük csökkenjen. Ilyenkor ugyanis mindig létezik köztük kettő, a és b, amelyekre például $a \geq b+2$; helyettesítsük a-t $(a-1)$-gyel, b-t pedig $(b+1)$-gyel. Ekkor

$$(a^2+b^2)-\left((a-1)^2+(b+1)^2\right)=2(a-b-1)\geq 2.$$

A négyzetösszeg tehát csak a fenti esetben veheti fel a minimumát, ami ezek szerint $6\cdot 201^2+4\cdot 200^2=402\,406$, a feladatban szereplő összeg legkisebb értéke ezért

$$\frac{402\,406}{2}-1003=200\,200.$$