Megoldás. Jelölje a henger sugarát r, a gömb és a henger közös középpontját O. A henger tengelyén átmenő sík a hengerből egy téglalapot, a gömbből egy főkört metsz ki.

A gömb térfogata: $\frac{4R^3\pi}{3}$. A henger térfogata: $r^2\pi m$, ahol $m=\frac{4}{3}R$.

A henger alapkörének sugarát az *ábrán* látható derékszögű háromszögből a Pitagorasz-tétel felhasználásával határozhatjuk meg:

$$r^2=R^2-\left(\frac{2}{3}\,R\right)^2=\frac{5}{9}\,R^2.$$

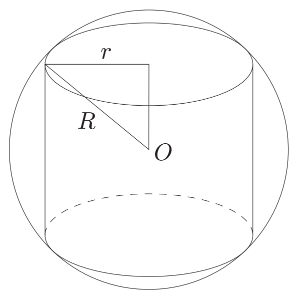
A henger térfogatába helyettesítve:

$$V_{\mathrm{h}}=\frac{5}{9}\,R^2\pi\cdot\frac{4}{3}\,R=\frac{20}{27}\,R^3\pi.$$

A két térfogat aránya:

$$\frac{V_{\mathrm{h}}}{V_{\mathrm{g}}}=\frac{\frac{20}{27}}{\frac{4}{3}}=\frac{5}{9}.$$

A henger térfogata a gömb térfogatának $\frac{5}{9}$-ed része.



Általánosítás. Legyen a henger magassága a gömb sugarának x-szerese: $m=Rx$ $(0<x<2)$. Ekkor a henger síkmetszetéből

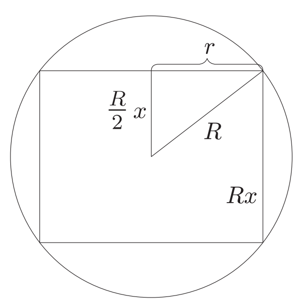
$$R^2=\frac{R^2}{4}\,x^2+r^2.$$

Innen $4r^2=R^2(4-x^2)$,

$$r^2=\frac{R^2(4-x^2)}{4}.$$

A térfogatok aránya:

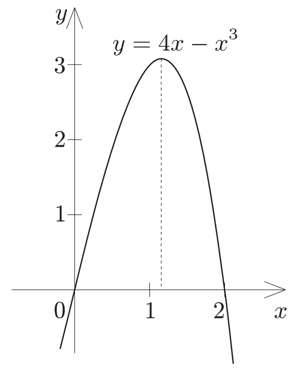
$$\frac{V_{\mathrm{h}}}{V_{\mathrm{g}}}=\frac{\frac{1}{4}R^2(4-x^2)\pi Rx}{\frac{4R^3\pi}{3}}=\frac{3}{16}(4x-x^3).$$



Az $y=4x-x^3$ függvényt ábrázoljuk a koordináta-rendszerben. A függvény deriváltja:

$$y'=4-3x^2=0,\quad \text{ha}\quad x=\pm\sqrt{\frac{4}{3}}\approx 1{,}1547.$$

A függvénynek ott lehet szélsőértéke, ahol a deriváltja 0. Valóban, $x=\sqrt{\frac{4}{3}}\approx 1{,}1547$ esetén a függvénynek maximuma van, ami esetünkben azt jelenti, hogy ha a henger magassága a gömb sugarának 1,1547-szerese, akkor a térfogatok maximális aránya közelítőleg 0,577 35.



y
$y = 4x - x^3$
3
2
1
0
1
2
x