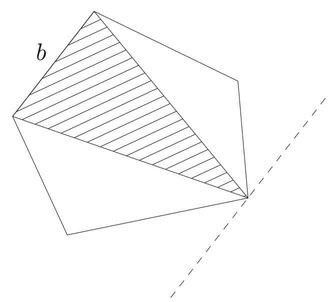
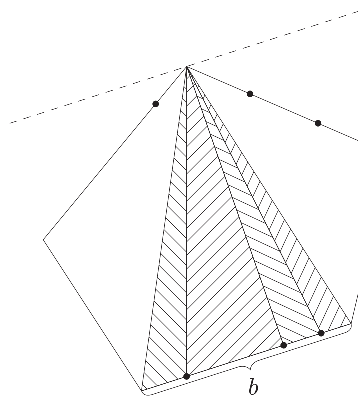
Megoldás. A sokszög mindegyik b oldalához létezik a szóban forgó maximális területű háromszög: ennek b-vel szemközti csúcsa a b egyenesétől legtávolabbi csúcs P-ben (*3. ábra*). A megoldás során egy XYZ háromszög területét $[XYZ]$-vel, a P sokszög területét pedig $[P]$-vel jelöljük.

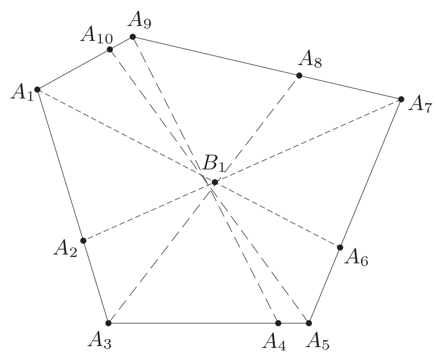


3. ábra

Első észrevételünk az, hogy ha egy sokszög szögei között a $180°$-ot is megengedjük és az oldalakon újabb csúcsokat veszünk fel, akkor sem P területe, sem a P oldalaihoz rendelt területek összege nem változik (*4. ábra*). Ezért P minden csúcsából húzzuk meg azt a félegyenest, amely P területét felezi (folytonossági meggondolások miatt ilyen félegyenes minden csúcshoz létezik), és e félegyenesnek a P határával való másik metszéspontját vegyük fel a csúcsok közé. Így az $A_1A_2A_3\dots A_{2n}$ sokszöget kapjuk, melynek területét az A_iA_{n+i} egyenes minden i-re felezi (*5. ábra*). (Az indexelés mod $2n$ ciklikus.)

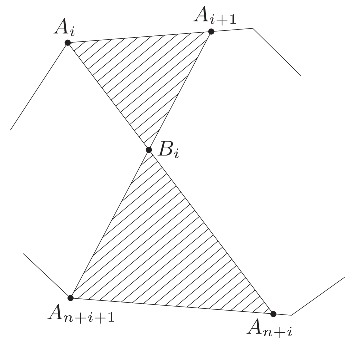


4. ábra



5. ábra

Az A_iA_{n+i} és $A_{i+1}A_{n+i+1}$ egyenesek tehát felezik a sokszög területét, így a P belsejében metszik egymást (*6. ábra*); jelölje a metszéspontjukat B_i $(1 \le i \le n)$. Ekkor $[A_iA_{i+1}B_i] = [A_{n+i}A_{n+i+1}B_i]$, hiszen A_iA_{i+1} és $A_{n+i}A_{n+i+1}$ is felezi P területét. Legyen $t_i = [A_iA_{i+1}B_i]$; ekkor $t_i = t_{n+i}$ és $B_i = B_{n+i}$.



6. ábra

Azt állítjuk, hogy az $A_iA_{i+1}B_i$ háromszögek lefedik P-t, és így $\sum_{i=1}^{2n} t_i \geq [P]$. Ehhez vegyük észre, hogy adott i-re az $A_iA_{i+1}B_i$ és az $A_{n+i}A_{n+i+1}$ háromszögek belsejének egyesítése azon P-beli pontok halmaza, amelyek az A_iA_{n+i} és $A_{i+1}A_{n+i+1}$ félegyenesek ellentétes partján vannak. (Ha egy P-beli X pont nincs ezeken a félegyeneseken, akkor ez azt jelenti, hogy az $A_iA_{n+i}X$ és az $A_{i+1}A_{n+i+1}X$ háromszögek ellenkező körüljárásúak.) Tekintsük ezután a P egy tetszőleges belső X pontját, amelyik egyik A_iA_{i+1} félegyenesre sem illeszkedik. Ez a pont a fentiek értelmében az A_1A_{n+1} és az $A_{n+1}A_1$ fégyenesek ellentétes partján van, így az $A_1A_{n+1}, A_2A_{n+2}, \ldots, A_nA_{2n}, A_{n+1}A_1$ félegyenesek sorozatában van két szomszédos, az A_iA_{n+i} és az $A_{i+1}A_{n+i+1}$, amelyeknek X szintén az ellentétes partján van. Ez pedig éppen azt jelenti, hogy X benne van az $A_iA_{i+1}B_i$ és az $A_{n+i}A_{n+i+1}B_i$ háromszögek egyikében (*6. ábra*).

Legyen az A_iA_{i+1} oldalhoz tartozó maximális területű háromszög területe M_i. Mivel $[A_iA_{i+1}B_i] = [A_{n+i}A_{n+i+1}B_i]$, ezért $B_iA_i \cdot B_iA_{i+1} = B_iA_{n+i} \cdot B_iA_{n+i+1}$. Ekkor vagy $B_iA_i \leq B_iA_{n+i}$ és $B_iA_{i+1} \geq B_iA_{n+i+1}$ vagy pedig $B_iA_i \geq B_iA_{n+i}$ és $B_iA_{i+1} \leq B_iA_{n+i+1}$.

Az első esetben

$$\frac{[A_iA_{i+1}A_{n+i}]}{[A_iA_{i+1}B_i]} = \frac{A_iA_{n+i}}{A_iB_i} \geq 2, \text{ és így } M_i \geq [A_iA_{i+1}A_{n+i}] \geq 2t_i.$$

A második esetben hasonlóan kapjuk, hogy

$$\frac{[A_iA_{i+1}A_{n+i+1}]}{[A_iA_{i+1}B_i]} = \frac{A_{i+1}A_{n+i+1}}{A_{i+1}B_i} \geq 2, \text{ és így ekkor is } M_i \geq [A_iA_{i+1}A_{n+i+1}] \geq 2t_i.$$

Mindenképpen igaz tehát, hogy $M_i \geq 2t_i$. Ezeket az egyenlőtlenségeket összegezve kapjuk, hogy $\sum_{i=1}^{2n} M_i \geq 2\sum_{i=1}^{2n} t_i \geq 2[P]$, és ezt kellett bizonyítanunk.