Megoldás. Tegyük fel, hogy létezik olyan α_0 egész, amelyre $Q(\alpha_0) = P^{(k)}(\alpha_0) = \alpha_0$ és $P(\alpha_0) \neq \alpha_0$. Legyen $\alpha_{j+1} = P(\alpha_j)$ és jelölje i azt a legkisebb pozitív egészt, amelyre $\alpha_i = \alpha_0$. Nyilván $2 \leq i \leq k$. Ismeretes, hogy ha $P(x)$ egész együtthatós polinom, $a \neq b$ egészek, akkor $a - b \,\big|\, P(a) - P(b)$, így fennállnak az alábbi oszthatóságok:

$$\alpha_1 - \alpha_0 \,\big|\, P(\alpha_1) - P(\alpha_0) = \alpha_2 - \alpha_1 \,\big|\, \alpha_3 - \alpha_2 \,\big|\, \dots \,\big|\, \alpha_i - \alpha_{i-1} \,\big|\, \alpha_{i+1} - \alpha_i = \alpha_1 - \alpha_0.$$

Ha $x \neq y$ egészek és $y \neq 0$, akkor $|y| \geq |x|$. Így, mivel a fenti oszthatósági láncban szereplő első és utolsó különbség azonos, ezeknek a különbségeknek az abszolút értéke állandó. Jelölje ennek az állandónak az értékét φ ($\varphi \neq 0$).

Azt állítjuk, hogy $\alpha_{j+1} - \alpha_j = \alpha_j - \alpha_{j-1}$ nem teljesülhet minden j-re. Ellenkező esetben ugyanis $\alpha_0 \pm i\varphi = \alpha_i = \alpha_0$ volna, vagyis $i\varphi = 0$, ami ellentmondás. Az α_j-k rendezése tehát nem monoton, van tehát olyan j, ahol megfordul, azaz $(\alpha_{j+1} - \alpha_j) = (-1)(\alpha_j - \alpha_{j-1})$. Erre a j-re így $\alpha_{j+1} = \alpha_{j-1}$ következik. Ekkor $P^{(i-j+1)}(\alpha_{j+1}) = P^{(i-j+1)}(\alpha_{j-1})$. Ez utóbbi egyenlőség pedig akkor és csak akkor teljesül, ha $\alpha_2 = \alpha_0$, tehát $i = 2$, azaz $P(\alpha_0) = \alpha_1$ és $P(\alpha_1) = \alpha_0$.

Legyenek ezután β_0 és β_1 olyan, az α_0, α_1 számok mindegyikétől különböző egészek, amelyekre ugyancsak teljesül, hogy $P(\beta_0) = \beta_1$ és $P(\beta_1) = \beta_0$. ($\beta_0 = \beta_1$ lehetséges.) Ekkor $\alpha_0 - \beta_0 \,\big|\, \alpha_1 - \beta_1 \,\big|\, \alpha_0 - \beta_0$ és $\alpha_0 - \beta_1 \,\big|\, \alpha_1 - \beta_0 \,\big|\, \alpha_0 - \beta_1$. Ebből következik, hogy

$$\alpha_0 - \beta_0 = \alpha_1 - \beta_1 \quad \text{vagy} \quad \alpha_0 - \beta_0 = \beta_1 - \alpha_1$$

és

$$\alpha_0 - \beta_1 = \alpha_1 - \beta_0 \quad \text{vagy} \quad \alpha_0 - \beta_1 = \beta_0 - \alpha_1.$$

Rendezés után a két részállítás második tagja ugyanazt mondja:

$$\alpha_0 + \alpha_1 = \beta_0 + \beta_1, \tag{1}$$

az első tagok pedig: $\alpha_0 - \alpha_1 = \beta_0 - \beta_1$, illetve $\alpha_0 - \alpha_1 = \beta_1 - \beta_0$ egyszerre nem teljesülhetnek, hiszen feltevésünk szerint $\alpha_0 - \alpha_1 \neq 0$. A két részállítás közül tehát legalább az egyikben a második tag teljesül, azaz (1) mindenképpen igaz, mégpedig attól függetlenül, hogy β_0 és β_1 egyenlők-e vagy sem.

I. Létezik olyan α_0 egész, amelyre $P(P(\alpha_0)) = \alpha_0$, de $P(\alpha_0) \neq \alpha_0$. Ekkor minden t egész számra, amelyre $Q(t) = t$, fennáll, hogy $P(t) + t = P(\alpha_0) + \alpha_0$. A $P(x) + x - P(\alpha_0) - \alpha_0$ polinom n-edfokú, ezért legfeljebb n ilyen t létezik.

II. Nincs ilyen α_0 egész. Ekkor minden olyan t egészre, amelyre $Q(t) = t$ fennáll, arra $P(t) = t$ is teljesül. Mivel a $P(x) - x$ polinom n-edfokú, legfeljebb n darab ilyen t létezhet. Ezzel a feladat állítását igazoltuk.