Megoldás. Ha $x<0$, akkor (1) bal oldala nagyobb 1-nél és kisebb 4-nél, tehát ekkor y nem egész.
Ha $x=0$, akkor $y\in\{-2,2\}$; két megoldást kapunk.
Ha $x=1$, akkor $y^2=11$, nem megoldás.
Ha $x=2$, akkor $y^2=37$, nem megoldás.
Ha $x>2$, akkor (1) bal oldala páratlan, tehát ha y egész, akkor $y=2k+1$ valamilyen k egész számra. Ekkor (1) $1+2^x+2^{2x+1}=(2k+1)^2$ alakú, ahonnan rendezés után

$$2^{x-2}(1+2^{x+1})=k(k+1). \tag{2}$$

A jobb oldali szorzat egyik tényezője páratlan, a másik páros, így az, amelyik páros, osztható 2^{x-2}-nel. Az is föltehető, hogy k nem negatív, hiszen a k negatív, illetve nemnegatív értékeire $k(k+1)$ ugyanazokat az értékeket veszi fel. (2) bal oldala pozitív, így k is pozitív.

1. eset: k páros. Ekkor $2^{x-2}\mid k$, azaz van olyan b pozitív egész, hogy $k=b\cdot 2^{x-2}$. Ezt (2)-be írva

$$2^{x-2}(1+2^{x+1})=b\cdot 2^{x-2}(b\cdot 2^{x-2}+1),\quad \text{azaz}$$

$$1+2^{x+1}=b^2\cdot 2^{x-2}+b. \tag{3}$$

Innen leolvasható, hogy $b\mid 1+2^{x+1}$, tehát b páratlan. Ha $b=1$, akkor $1+2^{x+1}>2^{x-2}+1$, (3) jobb oldala kisebb, mint a bal. Ha $b>1$, akkor $b\ge 3$, és így

$$b^2\cdot 2^{x-2}+b\ge 9\cdot 2^{x-2}+3>8\cdot 2^{x-2}+1=2^{x+1}+1,$$

(3) jobb oldala nagyobb, mint a bal. Az 1. esetben tehát nem kapunk újabb megoldást.

2. eset: $k+1$ páros. Ekkor $2^{x-2}\mid k+1$, azaz van olyan c pozitív egész, hogy $k=c\cdot 2^{x-2}-1$. Ezt (2)-be írva

$$2^{x-2}(1+2^{x+1})=(c\cdot 2^{x-2}-1)c\cdot 2^{x-2},\quad \text{azaz}$$

$$1+2^{x+1}=c^2\cdot 2^{x-2}-c. \tag{4}$$

Most is igaz, hogy $c\ge 1$ és páratlan, így az előzőhöz hasonló vizsgálatot végezhetünk.

Ha $c=1$, akkor a (4) jobb oldala $2^{x-2}-1$, kisebb, mint a bal oldal, ekkor nem kapunk megoldást.

Ha $c=3$, akkor a (4) egyenlőség : $1+2^{x+1}=9\cdot 2^{x-2}-3$. Rendezés után kapjuk, hogy $4=2^{x-2}$, azaz $x=4$. Ekkor (1) bal oldala $1+2^4+2^9=23^2$, két megoldást kapunk: $y=-23$, $y=23$.

Ha $c\ge 5$, akkor (4) jobb oldalát átalakítva

$$c^2\cdot 2^{x-2}-c=2^{x+1}+(c^2-8)2^{x-2}-c>2^{x+1}+c^2-8-c.$$

Ha $c\ge 5$, akkor $c^2-8-c>1$, tehát (4) jobb oldala nagyobb, mint a bal oldala, így több megoldást már nem kapunk.

A feladat feltételei tehát négy számpárra teljesülnek. Ezek: $(0;2)$, $(0;-2)$, $(4;23)$, $(4;-23)$.