Megoldás. A 2003 egymást nem metsző átló a P sokszöget 2004 háromszögre bontja, amelyek csúcsai a P csúcsai. Nevezzünk egy ilyen háromszöget jónak, ha két oldala jó és egyenlő szárú.

Legyen AB a sokszög egy átlója vagy oldala, és jelöljük n-nel az A, B csúcsokat összekötő, sokszögoldalakból álló két töröttvonal közül a rövidebbik (nem hosszabbik) oldalainak a számát ($1 \le n \le 1003$). A megrajzolt átlók azt a P_1 sokszöget is háromszögekre bontják, amelyet az n oldalszakaszból álló töröttvonal és az AB szakasz határol. (Ha $n=1$, azaz AB a P egy oldala, akkor a P_1 sokszög szakasszá fajul, a háromszögek száma 0.) Jelöljük $f(n)$-nel, hogy ezt a sokszöget az AB-t és egymást nem metsző átlók megrajzolásával (az eredeti felbontás átlói közül $(n-2)$ ilyen van) háromszögekre bontva legfeljebb hány jó háromszög jöhet létre. Az n-re vonatkozó teljes indukcióval bebizonyítjuk, hogy $f(n) \le \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$.

Ha $n=1$, akkor A és B szomszédos csúcsok P-ben, egyetlen háromszög sem jön létre P_1-ben, így jó sem, $f(1) = 0 = \left\lfloor \frac{1}{2} \right\rfloor$. Ha $n=2$, akkor A és B másodszomszédos csúcsok P-ben, a létrejövő egyetlen háromszög jó, $f(2)=1$, az állítás igaz. Legyen most $n>2$ és tegyük föl, hogy $f(i) \le \left\lfloor \frac{i}{2} \right\rfloor$, ha $2 \le i < n$. Tekintsük a P_1 sokszögnek azt a felbontását, amelynek során $f(n)$ jó háromszöget kapunk. Ebben a felbontásban a létrejövő háromszögek egyikének oldala az AB, legyen e háromszög harmadik csúcsa C (*2. ábra*). Ha az AC oldalt i, a BC-t pedig j hosszúságú töröttvonal köti össze, akkor $1 \le i, j < n$ és $i + j = n$. Ekkor nyilván

$$f(n) = \begin{cases} f(i) + f(j), & \text{ha az } ABC \text{ nem jó,} \\ f(i) + f(j) + 1, & \text{ha az } ABC \text{ jó.} \end{cases}$$

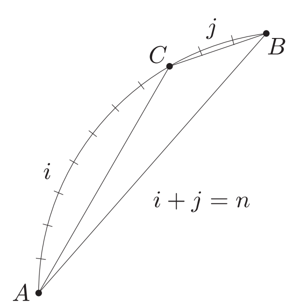
Az első esetben az indukciós föltevést tagonként alkalmazva és felhasználva, hogy $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \le \lfloor x + y \rfloor$:

$$f(n) = f(i) + f(j) \le \left\lfloor \frac{i}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{j}{2} \right\rfloor \le \left\lfloor \frac{i+j}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor .$$

Nézzük meg, hogyan lehetséges a második eset. A P_1 megválasztása miatt AB a leghosszabb a P_1 csúcsait összekötő szakaszok közül, így az ABC háromszögben is AB a leghosszabb oldal. Ez a háromszög tehát csak úgy lehet egyenlő szárú, ha $AC = CB$. Egy egyenlő szárú háromszögnek vagy mindkét szára jó, vagy egyik sem az (a háromszögnek és P-nek közös szimmetriatengelye van), így ha az egyenlő szárú ABC háromszög jó, akkor az AC és BC szárak a jó oldalai. Ekkor i és j egyenlő páratlan számok, azaz $n = 4k + 2$ alakú. Az indukciós feltevés szerint $f\left(\frac{n}{2}\right) \le \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ és így

$$f(n) = f\left(\frac{n}{2}\right) + f\left(\frac{n}{2}\right) + 1 \le 2\left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor + 1 = 2 \cdot k + 1 = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor,$$

az indukciós lépést igazoltuk.



2. ábra

Tekintsük ezek után a P sokszög megrajzolt átlóit. Ha van köztük olyan, amelyik áthalad a sokszög középpontján, akkor a jó háromszögek maximális száma

$$f(1003) + f(1003) \le 2 \cdot \left\lfloor \frac{1003}{2} \right\rfloor = 1002.$$

Ha ilyen átló nincsen, akkor tekintsük a felbontásban szereplő háromszögek közül azt, amelyik a belsejében tartalmazza a sokszög középpontját. Ennek bármely két csúcsát a P félkerületénél rövidebb töröttvonal köti össze, álljanak ezek rendre a, b, c szakaszból. ($a + b + c = 2006$.) Ha ez a háromszög jó, akkor a, b és c közül kettő páratlan, a felbontás összesen legfeljebb

$$1 + \left\lfloor \frac{a}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{b}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{c}{2} \right\rfloor = 1 + \frac{a+b+c}{2} - 1 = 1003,$$

ha pedig nem jó, akkor legfeljebb

$$\left\lfloor \frac{a}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{b}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{c}{2} \right\rfloor \le \left\lfloor \frac{a+b+c}{2} \right\rfloor = 1003$$

jó háromszöget tartalmaz.

A kapott felső korlát éles, 1003 jó háromszög jön létre, ha a másodszomszédos csúcsokat kötjük össze, a „belső” 1003 oldalú sokszöget pedig további 1000 átló megrajzolásával tetszőleges módon háromszögekre bontjuk.