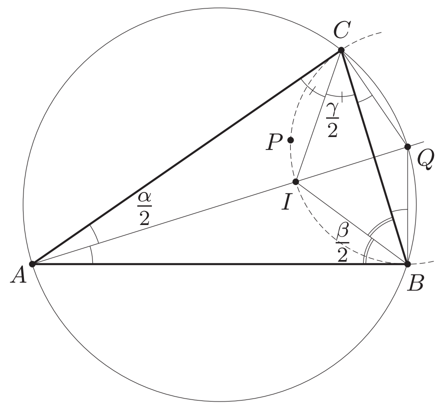
Megoldás. Legyenek az ABC háromszög szögei α, β, γ. A feltétel szerint egyenlő szögösszegek közös értékét jelölje φ. Ekkor $2\varphi = \beta + \gamma$, azaz $\varphi = \dfrac{\beta+\gamma}{2}$.

$$BPC\sphericalangle = 180^\circ - \varphi = 180^\circ - \frac{\beta}{2} - \frac{\gamma}{2} = BIC\sphericalangle,$$

és mivel a BC egyenes nem választja el a P és I pontokat, innen következik, hogy $BIPC$ húrnégyszög, P tehát rajta van a BIC körülírt körén.

Legyen AI és az ABC körülírt körének másik metszéspontja Q (*1. ábra*). Ismeretes, hogy Q felezi az őt tartalmazó BC ívet, ezért $QB = QC$. Másfelől $QCI\sphericalangle = \dfrac{\gamma}{2} + \dfrac{\alpha}{2} = QIC\sphericalangle$, mert az AIC háromszög külső szöge, ezért $QC = QI$. A fenti $BIPC$ húrnégyszög körülírt körének a középpontja tehát a Q, és így $QI = QP$.



1. ábra

Az APQ háromszögben a háromszög-egyenlőtlenség miatt

$$AP + PQ \geq AQ = AI + IQ,$$

azaz valóban fennáll, hogy $AP \geq AI$. Egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha P az AQ szakasz pontja, azaz $P = I$.