Megoldás.[1] Vegyük észre, hogy az egyenlőtlenség bal oldalán az abszolút érték belsejében álló kifejezés bármely két változó cseréje nyomán előjelet vált, és így bármely két változó különbségével osztható. Szorzattá alakítva kapjuk, hogy a bal oldal $\big|(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)\big|$. Az $x=a-b$, $y=b-c$, $z=c-a$, $t=a+b+c$ új változókat bevezetve egyrészt $x^2+y^2+z^2+t^2=3(a^2+b^2+c^2)$, másrészt minden olyan x, y, z, t számnégyesre, amelyre $x+y+z=0$, egyértelműen léteznek a megfelelő a, b, c mennyiségek. Keressük tehát a legkisebb olyan M számot, amelyre

$$|xyzt| \le M\frac{(x^2+y^2+z^2+t^2)^2}{9}. \tag{1}$$

A három új változó, x, y és z között van két azonos előjelű, föltehető, hogy ezek x és y. Mindkettejüket a számtani közepükkel helyettesítve a bal oldal értéke nő (nem csökken), a jobb oldal értéke pedig csökken (nem nő). (Ez nyomban adódik a mértani, számtani és a négyzetes közepek közti egyenlőtlenségből.) Föltehető tehát, hogy $x=y\left(=-\dfrac{z}{2}\right)$. Legyen $u=|x|=|y|=\left|\dfrac{z}{2}\right|$ és $v=|t|$. Ezekkel a változókkal (1) a

$$2u^3v \le M\frac{(6u^2+v^2)^2}{9} \tag{2}$$

alakba írható. A (2) egyenlőtlenséget $\sqrt{2}$-vel szorozva kapjuk, hogy

$$\sqrt{8}u^3v \le \frac{\sqrt{2}}{9}M(6u^2+v^2)^2,$$

amit az alábbi alakban is írhatunk:

$$\sqrt{2}u\cdot\sqrt{2}u\cdot\sqrt{2}u\cdot v \le \frac{\sqrt{2}}{9}M\cdot 16\left(\frac{\left(\sqrt{2}u\right)^2+\left(\sqrt{2}u\right)^2+\left(\sqrt{2}u\right)^2+v^2}{4}\right)^2.$$

Negyedik gyököt vonva:

$$\sqrt[4]{\sqrt{2}u\cdot\sqrt{2}u\cdot\sqrt{2}u\cdot v} \le \sqrt[4]{\frac{16\sqrt{2}}{9}M}\,\sqrt{\frac{\left(\sqrt{2}u\right)^2+\left(\sqrt{2}u\right)^2+\left(\sqrt{2}u\right)^2+v^2}{4}}. \tag{3}$$

Ha $M=\dfrac{9}{16\sqrt{2}}$, akkor (3) éppen a mértani és a négyzetes közepek közti azonosan teljesülő egyenlőtlenség, ami azt jelenti, hogy $M\le\dfrac{9}{16\sqrt{2}}$. Ez a becslés viszont éles, ugyanis ha például $a=3+\sqrt{2}$, $b=\sqrt{2}$, $c=\sqrt{2}-3$, akkor a feladat egyenlőtlenségében az egyenlőség teljesül. Az M keresett értéke így $\dfrac{9}{16\sqrt{2}}$.

[1] Más megoldások alapján.