

**Megoldás.** Vizsgáljuk meg, mi lehet két négyzetszám összegének négyes maradéka:

$$\begin{aligned}(2k)^2 + (2l)^2 &= 4(k^2 + l^2), \\ (2k + 1)^2 + (2l)^2 &= 4(k^2 + k + l^2) + 1, \\ (2k + 1)^2 + (2l + 1)^2 &= 4(k^2 + k + l^2 + l) + 2.\end{aligned}$$

Látszik, hogy a 4-es maradék csak 0, 1 és 2 lehet. Ezért ha Bandi el tudná érni, hogy a felírt szám 4-gyel osztva 3 maradékot adjon, akkor biztosan ő nyerne.

Ehhez az kell, hogy a szám kettes számrendszerben 11-re végződjön, hiszen pontosan akkor lesz a szám  $4n + 3$  alakú.

Bandinak az legyen a stratégiája, hogy mindig ugyanazt a számot írja le, mint amit Andi előtte leírt. Ekkor a kapott szám 11-re vagy 00-ra végződhet. Ha 11-re végződik, akkor Bandi nyert, hiszen két négyzetszám összege nem végződhet 11-re. Ha 00-ra végződik, akkor ez a szám osztható 4-gyel és tegyük fel, hogy két négyzetszám összege. Ekkor mindkét négyzetszám páros, tehát osztható 4-gyel. Ha osztjuk őket 4-gyel, akkor is két négyzetszám lesz belőlük és összegük kettes számrendszerbeli alakjának végéről eltűnik két nulla:

$$\begin{aligned}(2k)^2 + (2l)^2 &= 11\dots1100, \\ k^2 + l^2 &= 11\dots11.\end{aligned}$$

Ha az összegük még mindig 00-ra végződik, akkor újra és újra oszthatunk 4-gyel addig, amíg végül 11 lesz az utolsó két számjegy.

Mivel Andi 1-gyel kezdett, és utána Bandi is 1-est írt, azért előbb-utóbb biztosan 11-et kapunk. Mivel nincs két négyzetszám, aminek az összege 11-re végződik, azért Bandi stratégiája szerint mindig olyan számot kapnak, ami nem írható fel két négyzetszám összegeként; tehát Bandinak van nyerő stratégiája.