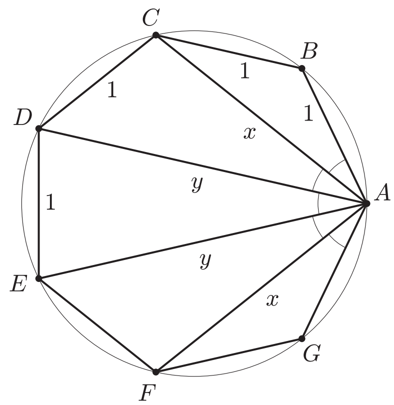
I. megoldás. A szabályos hétszögnek 14 átlója van, ebből 7 db x, 7 db y hosszúságú. A hétszög köré írt körben az A csúcsnál lévő, egyenlő ívekhez tartozó kerületi szögek egyenlőek, jelöljük ezeket δ-val. Írjuk fel a koszinusz-tételt az ABC, az ACD és az ADE háromszögben:

I. $$1^2 = 1^2 + x^2 - 2x\cos\delta,$$

II. $$1^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos\delta,$$

III. $$1^2 = y^2 + y^2 - 2y^2\cos\delta.$$



Az I. egyenletet átrendezve: $2x\cos\delta = x^2$; mivel $x \neq 0$, így $x = 2\cos\delta$. Vonjuk ki a III. egyenletből a II. egyenletet:

$$0 = y^2 - x^2 - 2y^2\cos\delta + 2xy\cos\delta.$$

$2\cos\delta$ helyére x-et írva és szorzattá alakítva:

$$0 = y^2 - x^2 - xy^2 + x^2y = (y-x)(y+x) - xy(y-x) = (y-x)(y+x-xy).$$

Mivel a szabályos hétszög átlói nem egyenlő hosszúak, $y - x \neq 0$, így $y + x - xy = 0$; átrendezve:

$$\frac{xy}{x+y} = 1.$$

A szabályos hétszög átlóinak harmonikus közepe:

$$\frac{14}{\frac{7}{x}+\frac{7}{y}} = \frac{14}{\frac{7y+7x}{xy}} = \frac{14}{\frac{7(x+y)}{xy}} = \frac{14}{7}\cdot\frac{xy}{x+y} = 2.$$

II. megoldás. Jelöljük a szabályos hétszög különböző hosszúságú átlóit x-szel és y-nal. Ekkor az átlók harmonikus közepe:

$$H = \frac{14}{\frac{7}{x}+\frac{7}{y}} = \frac{14}{\frac{7y+7x}{xy}} = \frac{14}{\frac{7(x+y)}{xy}} = 2\cdot\frac{xy}{x+y}.$$

Belátjuk, hogy $\frac{xy}{x+y} = 1$, vagyis $xy = x + y$.

Mivel a szabályos hétszög köré kör írható, $ACDE$ húrnégyszög. Alkalmazhatjuk rá Ptolemaiosz tételét:

$$AD \cdot CE = AC \cdot DE + AE \cdot DC,$$

vagyis $xy = x + y$ és így $H = 2$.