

I. megoldás.

$$\begin{aligned} 648 &= x^6 - y^2 = (x^3)^2 - y^2 = (x^3 + y)(x^3 - y) = \\ &= 2^3 \cdot 3^4 = 2 \cdot 324 = 4 \cdot 162 = 6 \cdot 108 = 12 \cdot 54 = 18 \cdot 36. \end{aligned}$$

A lehetséges osztópárok közül csak azokat írtuk fel, amelyekben mindkét tényező páros, hiszen ezek a tényezők két szám összegével és különbségével egyenlők, így azonos paritásúak. Ezenfelül, mivel szorzatuk páros, csak két páros tényezőről lehet szó.

A megfelelő osztópárban az egyik tényező $(x^3 + y)$ -nal, a másik $(x^3 - y)$ -nal egyenlő, ezért különbségük $2y$. A következő táblázatban a lehetséges y értékeket, majd abból a lehetséges $|x|$ értékeket adjuk meg. Ahol $|x|$ -re egész számot kapunk, az annak megfelelő x, y számpárok teszik igazgá az egyenletet.

$x^3 + y$	$x^3 - y$	$(x^3 + y) - (x^3 - y) = 2y$	y	$x^6 = 648 + y^2$	$ x $
324	2	322	161	26 569	nem egész
2	324	-322	-161	26 569	nem egész
162	4	158	79	6889	nem egész
4	162	-158	-79	6889	nem egész
108	6	102	51	3249	nem egész
6	108	-102	-51	3249	nem egész
54	12	42	21	1089	nem egész
12	54	-42	-21	1089	nem egész
36	18	18	9	729	3
18	36	-18	-9	729	3

Tehát az egyenlet megoldásai: $x_1 = 3, y_1 = 9; x_2 = -3, y_2 = 9; x_3 = 3, y_3 = -9; x_4 = -3, y_4 = -9$.

II. megoldás. Az x és y páros hatványon szerepel, ezért ha $(x; y)$ megoldáspár, akkor $(-x; y), (-x; -y), (x; -y)$ is megoldás.

Mivel 648 páros, azért x^6 és y^2 azonos paritású.

Tegyük föl először, hogy x és y is páros. Ekkor $x = 2n, y = 2m$.

$$\begin{aligned} (2n)^6 - (2m)^2 &= 648, \\ 2^6 n^6 - 2^2 m^2 &= 2^3 \cdot 3^4, \\ 2^4 n^6 - m^2 &= 2 \cdot 3^4. \end{aligned}$$

Az m csak páros lehet, mivel $2^4 n^6$ és $2 \cdot 3^4$ egyaránt páros. Így m^2 4-gyel is osztható, ezért a bal oldal osztható 4-gyel, a jobb oldal viszont nem. Tehát ebben az esetben nincs megoldás.

Nézzük ezután azt az esetet, ha x és y is páratlan. A páratlan négyzetszámok csak 1-re, 5-re vagy 9-re végződhetnek. Tehát x^6 utolsó számjegyének 9-nek, y^2 utolsó számjegyének 1-nek kell lennie, mert csak ilyen végződésű számok különbségéből kapjuk meg a 648 utolsó 8-as számjegyét. Így sem x , sem y nem végződhet 5-re.

Határozzuk meg $|x|$ minimális és maximális értékét. Az előzőek miatt $|x| \geq 3$. Mivel x^6 négyzetszám, érdemes lehet megvizsgálni két négyzetszám különbségét. Szomszédos egész számok négyzetének különbsége folyamatosan nő, ha a számok növekednek. Ha tehát $|x|$ maximális értékét keressük, az alábbi egyenlőtlenség alapján járhatunk el:

$$a^2 - (a - 1)^2 \leq 648,$$

amiből $a \leq 324,5$. Jelen esetben $a = x^3$, tehát $|x| \leq 6,87$.

A fentiek szerint $|x|$ páratlan, nem lehet 5, tehát csak 3 lehet. Ekkor a

$$3^6 - y^2 = 648$$

egyenletből $|y| = 9$.

Tehát a

$$(3; 9), \quad (-3; 9), \quad (-3; -9) \quad \text{és} \quad (3; -9)$$

megoldáspárookra teljesül az egyenlőség.

Megjegyzés. A bal oldal szorzattá alakítása után a többség a lehetséges osztópárok végignézésével jutott el a helyes megoldásra. Néhányan – megfelelő indoklással – alsó és felső becslést adtak a lehetséges x értékekre, majd a közöttük lévő lehetőségeket mind kipróbálták.