Megoldás. Az első feltétel azzal ekvivalens, hogy $PA : PB = CA : CB$. Vagyis P vagy rajta van AB szakaszfelező merőlegesén (ha $CA = CB$), vagy arra a k_c Apollóniusz-körre illeszkedik, amely azokat a pontokat tartalmazza, melyeknek az A és B pontoktól mért távolságuk aránya $CA : CB \neq 1$. Ugyanígy kapjuk a $PA \cdot BC = PC \cdot AB$ feltételből, hogy P szintén rajta van vagy AC szakaszfelező merőlegesén (ha $BA = BC$), vagy pedig azon a k_B Apollóniusz-körön, amely azokat a pontokat tartalmazza, melyeknek az A és C pontoktól mért távolságuk aránya $BA : BC \neq 1$.

Az Apollóniusz-köröket könnyen megszerkeszthetjük. Szimmetrikusak a két alappont összekötő egyenesére, ezért pl. k_c középpontja az AB egyenesen van, nyilván áthalad a C csúcson, a szögfelező-tétel miatt pedig a C-ből induló szögfelezőnek az AB oldallal alkotott F_c metszéspontján is. Vagyis középpontja CF_c szakaszfelező merőlegesének és AB-nek a metszéspontja. Az így megszerkesztett két körnek (illetve esetleg egyenesnek) a háromszög belsejébe eső metszéspontja szolgáltatja a P pontot.

Mindig pontosan egy ilyen P pont létezik, mert a k_c körnek a C-t F_c-vel összekötő rövidebb íve végig a háromszög belsejében halad. Ez az elfajuló esetben triviálisan teljesül, ha pedig például $\beta > \alpha$, akkor abból következik, hogy az O_cCA szög derékszögnél nagyobb, ahol O_c a k_c középpontja. Ezt egyszerű szögszámolással igazolhatjuk: mivel a BCF_c háromszögben a $BCF_c\sphericalangle = \frac{\gamma}{2}$, a $BF_cC\sphericalangle = \alpha + \frac{\gamma}{2}$, ezért az O_cF_cC egyenlő szárú háromszög miatt $CO_cF_c\sphericalangle = \beta - \alpha$, tehát $O_cCB\sphericalangle = \alpha$, és végül az $O_cCA\sphericalangle = \alpha + \gamma$, ami nagyobb $90°$-nál, mivel az ABC háromszög hegyesszögű.