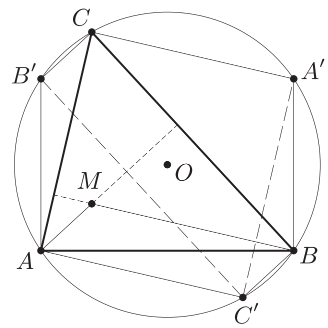
I. megoldás. A középpontos tükrözés tulajdonságaiból adódóan az $AC'A'C$, $ABA'B'$ és a $BCB'C'$ négyszögek téglalapok, hiszen átlóik egyenlő hosszúak és felezik egymást.

Jelölje M a háromszög magasságpontját. Ekkor BM párhuzamos AC'-vel, mivel mindkettő derékszöget zár be AC-vel. Hasonlóan AM párhuzamos $C'B$-vel. Így az $AMBC'$ négyszög paralelogramma. Ennek átlója AB, ami felezi a területét, így AMB területe egyenlő ABC' területével. Hasonlóan belátható, hogy ACB' területe egyenlő ACM területével, és BCA' területe egyenlő BCM területével. Tehát az $A'BC$, $AB'C$, ABC' háromszögek területének összege egyenlő a BCM, az ACM és az AMB háromszögek területének összegével, ami éppen az eredeti ABC háromszög területe.



II. megoldás. Az AOC, BOC és AOB egyenlő szárú háromszögekben (a kerületi és középponti szögek tétele szerint, az *ábrán* láthatóan):

$$2\alpha + 2\beta = 180^\circ - 2\gamma,$$
$$2\alpha + 2\gamma = 180^\circ - 2\beta,$$
$$2\gamma + 2\beta = 180^\circ - 2\alpha.$$

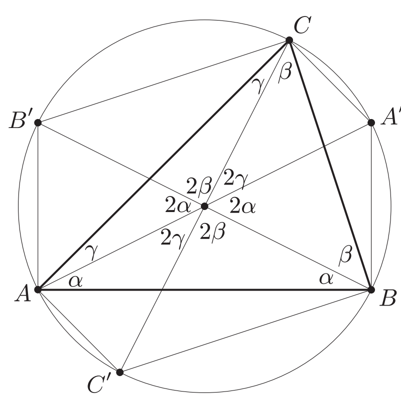
Írjuk föl az ABC háromszög területét $T_{ABC\triangle} = T_{AOC\triangle} + T_{COB\triangle} + T_{BOA\triangle}$ alakban. Itt (a $T_\triangle = \dfrac{xy\sin\delta}{2}$ képletet felhasználva):

$$T_{ABC\triangle} = \frac{r^2\sin(180^\circ - 2\gamma)}{2} + \frac{r^2\sin(180^\circ - 2\beta)}{2} + \frac{r^2\sin(180^\circ - 2\alpha)}{2} =$$
$$= \frac{r^2\sin 2\gamma}{2} + \frac{r^2\sin 2\beta}{2} + \frac{r^2\sin 2\alpha}{2}.$$

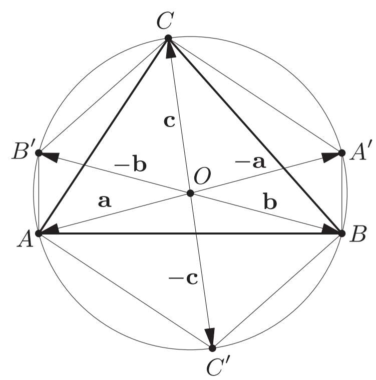
Hasonlóan az $AB'CA'BC'$ hatszög területe:

$$T_{AB'CA'BC'} = T_{AOB'} + T_{B'OC} + T_{COA'} + T_{A'OB} + T_{BOC'} + T_{C'OA} =$$
$$= 2\frac{r^2\sin 2\alpha}{2} + 2\frac{r^2\sin 2\beta}{2} + 2\frac{r^2\sin 2\gamma}{2},$$

ami éppen a kétszerese a $T_{ABC\triangle}$-nek. Ez éppen azt jelenti, hogy az $A'BC$, $AB'C$ és ABC' háromszögek területének összege egyenlő az ABC háromszög területével.



III. megoldás. Jelölje a háromszög körülírt körének középpontjából az A, B, C pontokba mutató vektorokat $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$. A tükrözés miatt az A', B', C' pontok helyvektorai ekkor $-\mathbf{a}$, $-\mathbf{b}$ és $-\mathbf{c}$.



Egy háromszög területe fele akkora, mint két, egy csúcsból induló oldalvektora vektoriális szorzatának a hossza. Írjuk föl ezzel a szóban forgó háromszögek területét; mivel valamennyi helyvektor a síkban van, vektoriális szorzatuk a síkra merőleges, és a szorzás megfelelő sorrendje esetén egymással azonos állású. Így megtehetjük, hogy hosszuk helyett magukkal a (vektoriális szorzatként kapott) vektorokkal számolunk:

$$T_{ABC\triangle} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{CB} \times \overrightarrow{CA} = \frac{1}{2} \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{c}) \times (\mathbf{a} - \mathbf{c}), \tag{1}$$

$$T_{ABC'\triangle} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{C'A} \times \overrightarrow{C'B} = \frac{1}{2} \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{c}) \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}),$$

$$T_{AB'C\triangle} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{B'C} \times \overrightarrow{B'A} = \frac{1}{2} \cdot (\mathbf{c} + \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} + \mathbf{b}),$$

$$T_{A'BC\triangle} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{A'B} \times \overrightarrow{A'C} = \frac{1}{2} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{a}) \times (\mathbf{c} + \mathbf{a}).$$

A három külső háromszög területének összege:

$$\sum T' = \frac{1}{2} \cdot \big((\mathbf{a} + \mathbf{c}) \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) + (\mathbf{c} + \mathbf{b}) \times (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + (\mathbf{b} + \mathbf{a}) \times (\mathbf{c} + \mathbf{a})\big).$$

Felbontva a zárójeleket, és kihasználva, hogy $\mathbf{x} \times \mathbf{y} = -\mathbf{y} \times \mathbf{x}$, valamint $\mathbf{x} \times \mathbf{x} = \mathbf{0}$, azt kapjuk, hogy

$$\sum T' = \frac{1}{2} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{b} + \mathbf{b} \times \mathbf{a} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}).$$

Felbontva (1)-ben a zárójeleket

$$T_{ABC\triangle} = \frac{1}{2} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{a} - \mathbf{c} \times \mathbf{a} - \mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \frac{1}{2} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{b} + \mathbf{b} \times \mathbf{a} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}).$$

A két terület valóban megegyezik.