Megoldás. A négyzetgyök alatt csak nemnegatív számok állhatnak, ezért a kifejezések csak akkor értelmesek, ha $x \geq 0$, $x - \sqrt{x} \geq 0$ azaz $x \geq 1$. Ekkor

$$x + \sqrt{x} \geq 0 \quad \text{és} \quad \frac{x}{x + \sqrt{x}} \geq 0$$

is teljesül. Tehát $x \geq 1$.

Szorozzuk meg az egyenlőtlenség mindkét oldalát a pozitív

$$\sqrt{x + \sqrt{x}} + \sqrt{x - \sqrt{x}}$$

kifejezéssel, és a bal oldalon alkalmazzuk az $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ azonosságot:

$$\left(\sqrt{x + \sqrt{x}}\right)^2 - \left(\sqrt{x - \sqrt{x}}\right)^2 > \frac{4}{3}\sqrt{\frac{x}{x + \sqrt{x}}}\left(\sqrt{x + \sqrt{x}} + \sqrt{x - \sqrt{x}}\right),$$

$$\left(x + \sqrt{x}\right) - \left(x - \sqrt{x}\right) > \frac{4}{3}\sqrt{x} + \frac{4}{3}\sqrt{x}\sqrt{\frac{x - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x}}},$$

$$2\sqrt{x} > \frac{4}{3}\sqrt{x} + \frac{4}{3}\sqrt{x}\sqrt{\frac{x - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x}}}.$$

Rendezve és $\frac{4}{3}\sqrt{x} > 0$-val osztva kapjuk:

$$\frac{1}{2} > \sqrt{\frac{x - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x}}}.$$

Mindkét oldal pozitív vagy nulla, ezért a négyzetre emelés az eredetivel ekvivalens egyenlőtlenséget eredményez:

$$\frac{1}{4} > \frac{x - \sqrt{x}}{x + \sqrt{x}},$$

amit rendezve és $\sqrt{x} > 0$-val osztva:

$$x + \sqrt{x} > 4\left(x - \sqrt{x}\right), \quad 5\sqrt{x} > 3x, \quad \frac{5}{3} > \sqrt{x}.$$

Ismét négyzetre emelve: $\frac{25}{9} > x$.

Mivel az $x \geq 1$ kikötés miatt ekvivalens átalakításokat hajtottunk végre, az egyenlőtlenség pontosan akkor teljesül, ha $1 \leq x < \frac{25}{9}$.