**I. megoldás.** Az egyenleteknek $x \geq \dfrac{2}{3}$ és $y \geq \dfrac{2}{3}$ esetén van értelme.

Adjuk össze az egyenleteket és rendezzük 0-ra:

$$x^2 + y^2 - 4\sqrt{3x-2} - 4\sqrt{3y-2} + 6 + 6 - x - y = 0.$$

Feltételezzük, hogy a kifejezés teljes négyzetek összegévé alakítható. Ekkor a $2 \cdot 2\sqrt{3x-2}$ és a $2 \cdot 2\sqrt{3y-2}$ kifejezések játsszák a kétszeres szorzatok szerepét.

Egészítsük ki a bal oldalt a szükséges kifejezésekkel:

$$x^2 + y^2 + \left[(3x-2) - 2 \cdot 2\sqrt{3x-2} + 4\right] +$$

$$+ \left[(3y-2) - 2 \cdot 2\sqrt{3y-2} + 4\right] + 4 + 4 - 4x - 4y = 0.$$

Rendezve:

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 - 4y + 4 + \left(\sqrt{3x-2} - 2\right)^2 + \left(\sqrt{3y-2} - 2\right)^2 = 0.$$

Feltételezésünk beigazolódott, az egyenlet bal oldala valóban négyzetösszeg:

$$(x-2)^2 + (y-2)^2 + \left(\sqrt{3x-2} - 2\right)^2 + \left(\sqrt{3y-2} - 2\right)^2 = 0.$$

A bal oldalon álló tagok mindegyike 0-nál nagyobb vagy egyenlő, összegük viszont 0. Ez csak úgy lehetséges, ha mindegyik 0-val egyenlő.

Ha $(x-2)^2 = 0$ és $(y-2)^2 = 0$, akkor $x = 2$ és $y = 2$. Ezekre az értékekre a másik két kifejezés is 0-t ad, és kikötéseink is teljesülnek.

Tehát az egyenletrendszer egyetlen megoldása $x = y = 2$.

**II. megoldás.** Tegyük fel, hogy $3x - 2 \geq 0$ és $3y - 2 \geq 0$ teljesül. Ekkor alkalmazhatjuk a számtani és mértani közép egyenlőtlenségét a következő kifejezéseknél:

$$4\sqrt{3x-2} = 2 \cdot \sqrt{4(3x-2)} \leq 2 \cdot \frac{(3x-2)+4}{2} = 3x + 2,$$

$$4\sqrt{3y-2} = 2 \cdot \sqrt{4(3y-2)} \leq 2 \cdot \frac{(3y-2)+4}{2} = 3y + 2.$$

Ezzel megbecsülhetjük eredeti egyenleteink bal oldalát:

$$y = x^2 - 4\sqrt{3x-2} + 6 \geq x^2 - 3x - 2 + 6 = x^2 - 3x + 4,$$

$$x = y^2 - 4\sqrt{3y-2} + 6 \geq y^2 - 3y - 2 + 6 = y^2 - 3y + 4.$$

Másrészt az $x$ minden értékére $x \leq x^2 - 3x + 4$, ugyanis $x$-et kivonva

$$0 \leq x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$$

(az egyenlőség $x = 2$-nél áll fenn). Ugyanígy minden $y$-ra $y \leq y^2 - 3y + 4$, és egyenlőség $y = 2$-nél áll fenn.

A négy egyenlőtlenséget összevetve:

$$x \leq x^2 - 3x + 4 \leq y \leq y^2 + 3y + 4 \leq x.$$

Látható, hogy mindegyik becslésben az egyenlőségnek kell fennállnia, ami csak $x = y = 2$-nél teljesül; ez pedig ki is elégíti az egyenletrendszert.