I. megoldás. Rendezzük át az egyenletet:

$$\cos 4x + \sin 6x = \operatorname{ctg} 5x + \operatorname{tg} 5x.$$

Mivel $\operatorname{ctg} 5x = \dfrac{1}{\operatorname{tg} 5x}$, a jobb oldal egy számnak és a reciprokának az összege, ezért az abszolút értéke legalább 2. A bal oldal abszolút értéke viszont a $\sin x$ és a $\cos x$ függvény értékkészlete ($[-1;1]$) miatt legfeljebb 2. Ezek alapján csak akkor lehet egyenlő a két oldal, ha mindkettő -2, vagy ha mindkettő 2.

I. eset: mindkét oldal -2, ekkor

$$-2 = \cos 4x + \sin 6x = \operatorname{ctg} 5x + \operatorname{tg} 5x.$$

Ebben az esetben teljesülnie kell a következőknek:

$$\operatorname{tg} 5x = \operatorname{ctg} 5x = -1, \tag{1}$$
$$\cos 4x = -1, \tag{2}$$
$$\sin 6x = -1. \tag{3}$$

Ezekből:

$$5x = \frac{3}{4}\cdot\pi + k\cdot\pi, \tag{1'}$$
$$4x = \pi + l\cdot 2\pi, \tag{2'}$$
$$6x = \frac{3}{2}\cdot\pi + m\cdot 2\pi. \tag{3'}$$

Az (1′) és a (3′) egyenlet felhasználásával kapjuk, hogy:

$$m = \frac{3}{5}\cdot k - \frac{3}{10} = \frac{6k-3}{10}.$$

Mivel m egész szám, $6k-3$ osztható 10-zel; ám $6k-3$ páratlan szám, így biztosan nem osztható 10-zel.

Tehát ebben az esetben nincsen megoldása az egyenletnek.

II. eset: mindkét oldal 2, ekkor

$$2 = \cos 4x + \sin 6x = \operatorname{ctg} 5x + \operatorname{tg} 5x.$$

Ebben az esetben teljesülnie kell, hogy:

$$\operatorname{tg} 5x = \operatorname{ctg} 5x = 1, \tag{4}$$
$$\cos 4x = 1, \tag{5}$$
$$\sin 6x = 1. \tag{6}$$

Ezekből:

$$5x = \frac{1}{4}\cdot\pi + k\cdot\pi, \tag{4'}$$
$$4x = l\cdot 2\pi, \tag{5'}$$
$$6x = \frac{1}{2}\cdot\pi + m\cdot 2\pi. \tag{6'}$$

A (4′) és az (5′) egyenlet felhasználásával:

$$l = \frac{2}{5}\cdot k + \frac{1}{10} = \frac{4k+1}{10}.$$

Mivel $4k+1$ páratlan, azért l nem lehet egész szám; ebben az esetben sincsen megoldása az egyenletnek.

Tehát az egyenletnek nem létezik megoldása. (Mivel csak a $(-\pi;\pi)$ intervallumban kerestünk megoldást, így akár egyszerűbben is ugyanerre a következtetésre juthattunk volna, ha megnézzük, hogy az (1) egyenlet ebbe az intervallumba eső megoldásai kielégítik-e a (2) és a (3) egyenletet, illetve a (4) egyenletnek ebbe az intervallumba eső megoldásai kielégítik-e az (5) és a (6) egyenletet.)

II. megoldás. A tangens és kotangens helyére helyettesítsünk szinuszt és koszinuszt, és rendezzük át az egyenletet:

$$\cos 4x + \sin 6x = \frac{\cos 5x}{\sin 5x} + \frac{\sin 5x}{\cos 5x} = \frac{\sin^2 5x + \cos^2 5x}{\sin 5x\cdot\cos 5x} = \frac{1}{\sin 5x\cdot\cos 5x}.$$

Beszorozva:

$$1 = \sin 5x \cdot \cos 5x(\cos 4x + \sin 6x) = \frac{\sin 10x}{2}(\cos 4x + \sin 6x).$$

Innen:

$$2 = \sin 10x(\cos 4x + \sin 6x) = \sin 10x \cos 4x + \sin 10x \sin 6x.$$

A szögfüggvények szorzatát összeggé alakítva:

$$2 = \frac{\sin 14x + \cos 6x}{2} + \frac{\cos 16x - \cos 4x}{-2}\,.$$

Átrendezve az egyenletet:

$$4 + \cos 16x = \sin 14x + \cos 6x + \cos 4x.$$

Látható, hogy a bal oldal lehetséges legkisebb értéke 3, a jobb oldalnak pedig a legnagyobb értéke 3, így az egyenlet mindkét oldala egyenlő 3-mal. Ezért $\cos 4x = 1$, ahonnan $4x = 2k\pi$, ahol k egész szám. Innen $2x = k\pi$. A feladatban megadott kikötés miatt $-2\pi < 2x < 2\pi$, ebből pedig $-2 < k < 2$. Tehát k lehetséges értékei -1, 0 és 1. A 0 nem megoldás, mivel $\sin 14x = \sin 0 = 0 \neq 1$. Az 1 és a -1 sem megoldás, mivel mindkettő esetén $\cos 6x = -1 \neq 1$.

Tehát a fenti egyenletnek nincs megoldása.