I. megoldás. A feltétel szerint (x és y pozitív) az egyenlőtlenség két oldalán pozitív számok állnak, így elegendő a négyzetre emeléssel kapott egyenlőtlenséget bizonyítani. Ez a következő:

$$\frac{x^4+y^4+3x^2y^2+2x^3y+2xy^3}{9} \le \frac{x^2+2xy+y^2}{4}\cdot\frac{x^2+y^2}{2}.$$

A műveleteket elvégezve és rendezve:

$$8x^4+8y^4+24x^2y^2+16xy^3+16x^3y \le 9x^4+18x^3y+18x^2y^2+18xy^3+9y^4,$$

$$0 \le x^4+2x^3y-6x^2y^2+2xy^3+y^4.$$

Vegyük észre, hogy a jobb oldalon $\left(x^2-y^2\right)^2+2xy(x-y)^2$ áll. A két négyzet nem negatív, xy a feltétel miatt pozitív, így a bizonyítandó állítás igaz. Egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $x=y$.

Megjegyzések 1. A négyzetre emelést másképpen rendezve a

$$6x^2y^2 \le x^4+2x^3y+2xy^3+y^4$$

egyenlőtlenség a következőképpen is igazolható. A jobb oldalon hat szám összege áll, ezek mértani közepe

$$\sqrt[6]{x^4x^3yx^3yxy^3xy^3y^4}=\sqrt[6]{x^{12}y^{12}}=x^2y^2,$$

tehát a számtani és mértani közepek közti egyenlőtlenségből következik a bizonyítandó állítás.

2. Ha a két oldalt $y^2>0$-val osztjuk, akkor a $t=\dfrac{x}{y}$ változót bevezetve az egyváltozós

$$\frac{t^2+t+1}{3} \le \frac{t+1}{2}\cdot\sqrt{\frac{t^2+1}{2}}, \qquad t>0$$

egyenlőtlenséghez jutunk. Ennek igazolása történhet a megoldáshoz hasonló módon, a négyzetre emelés és a műveletek elvégzése után adódó $0 \le t^4+2t^3-6t^2+2t+1$ egyenlőtlenség jobb oldalán adódó polinom szorzattá alakításával, de a differenciálszámítás eszközeivel is.

3. Bár a bizonyítás elég egyszerű, a kapott egyenlőtlenség meglehetősen finom. Ha ugyanis a jobb oldalon a négyzetes közepet a nála nem nagyobb számtani középpel helyettesítjük, akkor az egyenlőtlenség iránya megfordul, azaz

$$\frac{x+y}{2} \le \sqrt{\frac{x^2+xy+y^2}{3}}. \tag{1}$$

Ennek igazolása a fentiekhez hasonló módon is történhet, de ha felidézzük az áprilisi számunkban megjelent *Megjegyzés a logaritmikus középhez* c. cikkben olvasható tételt[1], amely elég általános körülmények között tisztázza az integrálközépnek nevezett

$$K_f(a,b)=f^{-1}\left(\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}\right)$$

és az $A(a;b)$ számtani közép nagyságviszonyát, akkor (1) jobb oldalán felismerhető a növő és konvex $f(t)=t^2$ függvény $[x;y]$ intervallumon vett integrálközepe, az (1) egyenlőtlenség pedig a tétel állítása. Az eredeti állítás is megkapható ilyen módon és így egy újabb – bár természetesnek talán nem nevezhető – bizonyításhoz jutunk. (Fény derül viszont a feladat eredetére.)

II. megoldás. Az $f(t)=\sqrt{t}$ függvény az értelmezési tartományán növő és konkáv, így a fenti tétel szerint $K_f(a;b)\le A(a;b)$, azaz

$$\left(\frac{\int_a^b \sqrt{t}\,dt}{b-a}\right)^2 \le \frac{a+b}{2}.$$

Az integrál értéke:

$$\frac{2}{3}\left[t^{\frac{3}{2}}\right]_a^b=\frac{2}{3}\left(b^{\frac{3}{2}}-a^{\frac{3}{2}}\right).$$

Mivel a és b pozitívak, elvégezhetjük az $a=x^2$, $b=y^2$ helyettesítéseket. Ekkor az integrálközép négyzetgyöke:

$$K=\frac{2}{3}\cdot\frac{x^3-y^3}{x^2-y^2}=\frac{x^2+xy+y^2}{3}\cdot\frac{2}{x+y}\le\sqrt{A(x^2;y^2)}=\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}},$$

ahonnan a bizonyítandó állítást kapjuk, ha x és y számtani közepével szorzunk.

[1] **Tétel.** *Ha f pozitív,* növő és konkáv *vagy* fogyó és konvex, *akkor $K_f(a,b)\le A(a,b)$. (Ugyanígy ha f* növő és konvex *vagy* fogyó és konkáv, *akkor a fenti egyenlőtlenség fordítva teljesül: $A(a,b)\le K_f(a,b)$.)*