

Megoldás. Ha $n = 1$, akkor az $N = 5^n + 12n^2 + 12n + 3 = 32$, nem osztható 100-zal. Feltehetjük tehát, hogy $n \geq 2$.

N akkor lesz osztható 100-zal, ha osztható 4-gyel és 25-tel, mivel $100 = 4 \cdot 25$ és $(4; 25) = 1$. Az $n \geq 2$ miatt $5^2 = 25 \mid 5^n$, ezért osztója kell legyen a $12n^2 + 12n + 3 = 3(2n + 1)^2$ -nek. Mivel $(3; 25) = 1$, azért 25 osztója kell legyen a $(2n + 1)^2$ -nek. Ez akkor teljesül, ha $2n + 1$ osztható 5-tel, azaz $n = 5k + 2$ alakú. Ekkor $2n + 1 = 2(5k + 2) + 1 = 10k + 5$.

A 4 akkor osztója N -nek, ha osztója $(5^n + 3)$ -nak. De $5^n = (4 + 1)^n$ maradéka 1, ezért 4-gyel osztva $1 + 3 = 4$ -et, azaz nullát ad maradékul, minden $n \geq 1$ -re osztható tehát 4-gyel.

Összefoglalva: 100 akkor és csak akkor osztója az $5^n + 12n^2 + 12n + 3$ összegnek, ha $n = 5k + 2$ alakú, ahol $k = 0, 1, 2, 3, \dots$.