I. megoldás. Ha az E pont az AB szakaszon helyezkedik el, akkor $AC=DB=AB$, vagyis a kifejezés értéke $AB(AE+BE)=AB^2$. Ha E nincs az AB szakaszon, akkor legyen $DAB\sphericalangle=\alpha$ és $CBA\sphericalangle=\beta$. Thalész tétele szerint az ADB és ACB háromszögek derékszögűek. Ezért $AD=AB\cos\alpha$, $AC=AB\sin\beta$, $BC=AB\cos\beta$ és $BD=AB\sin\alpha$. Az AEB háromszög E-nél lévő külső szöge:

$$DEA\sphericalangle=CEB\sphericalangle=EAB\sphericalangle+EBA\sphericalangle=$$
$$=90^\circ-\beta+90^\circ-\alpha=180^\circ-\alpha-\beta$$

(*1. ábra*). Ezért az ADE és a BCE derékszögű háromszögekben:

$$AE=\frac{AD}{\sin(180^\circ-\alpha-\beta)}=\frac{AD}{\sin(\alpha+\beta)}=\frac{AB\cos\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$$

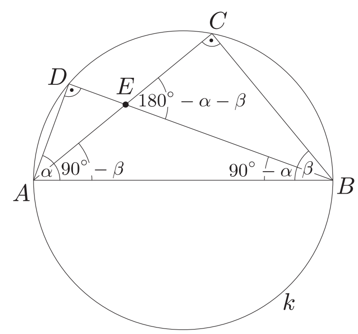
és

$$BE=\frac{BC}{\sin(180^\circ-\alpha-\beta)}=\frac{BC}{\sin(\alpha+\beta)}=\frac{AB\cos\beta}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

Tehát

$$AC\cdot AE+BD\cdot BE=\frac{AB\sin\beta\cdot AB\cos\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}+\frac{AB\sin\alpha\cdot AB\cos\beta}{\sin(\alpha+\beta)}=$$

$$=\frac{AB^2(\sin\beta\cos\alpha+\sin\alpha\cos\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}=AB^2.$$



1. ábra

A feladatban szereplő kifejezés értéke tehát E helyzetétől függetlenül mindig AB^2.

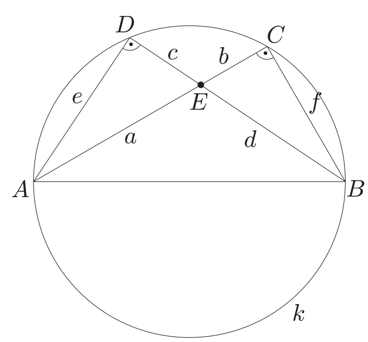
II. megoldás. Abban az esetben adunk újabb megoldást, ha E nincs az AB szakaszon. Használjuk a *2. ábra* jelöléseit. Thalész tételéből következik, hogy az ADB, ADE, ACB és ECB háromszögek derékszögűek. Ezért Pitagorasz tétele teljesül rájuk. Ezt alkalmazva az első és a második, illetve a harmadik és a negyedik háromszögre:

$$AB^2=e^2+(c+d)^2=a^2-c^2+(c^2+d^2+2cd)=a^2+d^2+2cd,$$

$$AB^2=f^2+(a+b)^2=d^2-b^2+(a^2+b^2+2ab)=d^2+a^2+2ab.$$

A két egyenletet összeadva kapjuk, hogy:

$$2AB^2=2a^2+2d^2+2ab+2cd=2\big(a(a+b)+d(d+c)\big)=2(AC\cdot AE+BD\cdot BE).$$



2. ábra

$AC\cdot AE+BD\cdot BE$ értéke tehát E helyzetétől függetlenül mindig megegyezik a kör átmérőjének négyzetével.

Megjegyzés. Könnyen igazolható, hogy a feladat állítása, tehát hogy $AC\cdot AE+BD\cdot BE=AB^2$ abban az esetben is teljesül, ha E a kör síkjának tetszőleges pontja.