**I. megoldás.** A kiszámítandó valószínűség a kedvező elemi események és az összes elemi esemény számának a hányadosa.

Az összes elemi események száma a 12 hosszú fej–írás sorozatok száma. $2^{12} = 4096$ ilyen sorozat van, mivel mind a 12 dobásnál vagy fejet, vagy írást dobunk egyforma valószínűséggel.

A kedvező elemi események száma azoknak a fej–írás sorozatoknak a száma, amelyekben nem követi egymást három fej. Számoljuk össze ezeket az eseteket.

Számoljuk aszerint, hogy hány írás van bennük. Jelölje $i$ az írások számát, $i$ 0-tól 12-ig vesz fel értékeket.

Az $i$ darab írás $i+1$ „részre” osztja a sorozatot. Ebben az $i+1$ részben $12-i$ fej oszlik el úgy, hogy minden részben 0, 1 vagy 2 található belőlük.

Ha $i = 12$, akkor biztosan nem követi egymást három fej. 12 írásnak tehát 1-féle sorrendje van.

Ha $i = 11$, akkor az 1 fej a 12 rész bármelyikén állhat, ami $\binom{12}{1} = 12$ lehetőség.

Ha $i = 10$, akkor a 2 fej a 11 részben vagy párban helyezkedik el, ami $\binom{11}{1} = 11$ lehetőség; vagy külön-külön, ami pedig $\binom{11}{2} = 55$ lehetőség. Ez együtt

$$11 + 55 = 66$$

lehetőség.

Ha $i = 9$, akkor a keletkezett 10 részben a 3 fej állhat egy párban és egy külön, ez $\binom{10}{1} \cdot \binom{9}{1} = 90$ lehetőség; illetve egyesével, ez $\binom{10}{3} = 120$ lehetőség. Ez együtt

$$120 + 90 = 210$$

lehetőség.

Ha $i = 8$, akkor 9 rész jön létre. A 4 fej állhat két párban, ez $\binom{9}{2} = 36$ sorrend; egy párban és kettő külön-külön, ez $\binom{9}{2} \cdot \binom{7}{1} = 252$ sorrend; illetve külön-külön, ez pedig $\binom{9}{4} = 126$ lehetőség. Együtt

$$126 + 252 + 36 = 414$$

sorrend.

Hasonlóan, tetszőleges $i$ esetén a lehetőségek számát aszerint célszerű megszámolni, hogy hány olyan rész van, ahol párban állnak a fejek. Mivel $i+1$ részre jut összesen $12-i$ fej, ezért a fej-párok száma legfeljebb $\left[\frac{12-i}{2}\right]$. Ha a fej-párok száma $0 \le k \le \left[\frac{12-i}{2}\right]$, akkor a lehetőségek száma $\binom{i+1}{k}\binom{i+1-k}{12-i-2k}$, hiszen az $i+1$ részből $\binom{i+1}{k}$-féleképpen választhatjuk ki, hogy melyekben álljanak a fejek párban, és a maradék $i+1-k$ helyből pedig $\binom{i+1-k}{12-i-2k}$ lehetőség van annak kiválasztására, hogy a megmaradt $12-i-2k$ fejet melyik részre tegyük.

Ezek alapján a lehetőségek száma $i = 7$ esetén $(0 \le k \le 2)$:

$$\binom{8}{0}\binom{8}{5} + \binom{8}{1}\binom{7}{3} + \binom{8}{2}\binom{6}{1} = 56 + 280 + 168 = 504.$$

Ha $i = 6$, akkor $0 \le k \le 3$ és így a lehetőségek száma

$$\binom{7}{0}\binom{7}{6} + \binom{7}{1}\binom{6}{4} + \binom{7}{2}\binom{5}{2} + \binom{7}{3}\binom{4}{0} = 7 + 105 + 210 + 35 = 357.$$

Ha $i = 5$, akkor $0 \le k \le 3$, és erre

$$\binom{6}{0}\binom{6}{7} + \binom{6}{1}\binom{5}{5} + \binom{6}{2}\binom{4}{3} + \binom{6}{3}\binom{3}{1} = 0 + 6 + 60 + 60 = 126$$

lehetőség van.

$i = 4$ esetén a lehetőségek száma $(0 \le k \le 4)$:

$$\binom{5}{0}\binom{5}{8} + \binom{5}{1}\binom{4}{6} + \binom{5}{2}\binom{3}{4} + \binom{5}{3}\binom{2}{2} + \binom{5}{4}\binom{1}{0} =$$
$$= 0 + 0 + 0 + 10 + 5 = 15.$$

Ha $i \leq 4$, akkor az összeg minden tagja 0. (Ami abból is következik, hogy legfeljebb 4 rész keletkezik, viszont legalább 9 fejet dobunk, és azok párosával való elhelyezéséhez is legalább 5 részre lenne szükség.) Tehát 4-nél kevesebb írás dobása esetén nem áll elő megfelelő sorrend.

Összesen

$$1 + 12 + 66 + 210 + 414 + 504 + 357 + 126 + 15 = 1705$$

megfelelő sorrend létezik, így a keresett valószínűség $\frac{1705}{4096} \approx 0{,}416$.

**II. megoldás.** Próbáljuk meghatározni, hogy $n$ hosszú fej–írás sorozat esetén hány olyan sorozat van, amelyben nem szerepel három fej egymás után. Nevezzük az ilyen sorozatokat „jó sorozat”-oknak, a számukat pedig jelöljük $D_n$-nel.

Tekintsük egy $n$ elemű jó sorozat utolsó elemét.

Amennyiben ez írás, akkor pontosan akkor jó a sorozat, ha az első $(n-1)$ elem is jó sorozatot alkot. Az ilyen sorozatok száma tehát $D_{n-1}$.

Amennyiben az utolsó elem fej, és az utolsó előtti írás, akkor pontosan abban az esetben jó a sorozat, ha az első $(n-2)$ elem jó sorozatot alkot. Az ilyen sorozatok száma tehát $D_{n-2}$.

Ha az utolsó és az utolsó előtti elem is fej, akkor csak úgy lehet jó a sorozat, ha az $(n-2)$-ik elem nem fej és az első $(n-3)$ elemből alkotott sorozat nem tartalmaz három egymás utáni fejet, vagyis jó sorozat. Az ilyen sorozatok száma tehát $D_{n-3}$.

Egy $n$ hosszú sorozat pontosan a fenti esetek egyikébe tartozik bele, ezért teljesül, hogy $D_n = D_{n-3} + D_{n-2} + D_{n-1}$.

Mivel a dobások egymástól függetlenek, és minden dobásnál 1/2–1/2 valószínűséggel dobunk írást, illetve fejet, ezért annak a valószínűsége, hogy $n$ dobás esetén a kapott dobássorozat jó, $\frac{D_n}{2^n}$.

A feladatban $n = 12$, így $D_{12}$-t kell meghatároznunk a rekurzív képlet segítségével. 1, illetve 2 dobás esetén biztosan nincs három fej egymás után, tehát $D_1 = 2^1 = 2$ és $D_2 = 2^2 = 4$. 3 dobás esetén a fej–fej–fej sorozat nem jó, ezért $D_3 = 2^3 - 1 = 7$. Innen $D_4 = D_1 + D_2 + D_3 = 2 + 4 + 7 = 13$; $D_5 = D_2 + D_3 + D_4 = 4 + 7 + 13 = 24$; $D_6 = 44$; $D_7 = 81$; $D_8 = 149$; $D_9 = 274$; $D_{10} = 504$; $D_{11} = 927$; $D_{12} = 274 + 504 + 927 = 1705$.

A keresett valószínűség $\frac{1705}{2^{12}} = \frac{1705}{4096} \approx 0{,}42$.