Megoldás. A feladatot vektorok segítségével fogjuk megoldani.

A három testből álló rendszer zárt (külső erő nem hat rájuk), ezért a tömegközéppontjuk nem gyorsul. Válasszunk egy olyan koordináta-rendszert, amelyben a tömegközéppont nem is mozog, hanem a koordináta-rendszer középpontjában áll.

Jelölje a pontszerű testek helyvektorait ebben a (tömegközépponti) koordináta-rendszerben $\boldsymbol{r}_i$, tömegüket pedig m_i $(i=1,2,3)$. Ezek a mennyiségek nem függetlenek egymástól, hiszen a tömegközéppont helyvektora nullvektor kell legyen, vagyis fennáll $m_1\boldsymbol{r}_1+m_2\boldsymbol{r}_2+m_3\boldsymbol{r}_3=0$, ahonnan pl. $\boldsymbol{r}_3$ kifejezhető:

$$\boldsymbol{r}_3=-\frac{m_1}{m_3}\boldsymbol{r}_1-\frac{m_2}{m_3}\boldsymbol{r}_2. \tag{1}$$

Írjuk fel az m_1 tömegű test mozgásegyenletét! Erre a testre az m_2 tömegű test

$$\boldsymbol{F}_{21}=f\frac{m_1m_2}{d_{12}^3}(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1)$$

erőt fejt ki (f a Newton-féle gravitációs állandó, d_{12} pedig a két test állandónak feltételezett távolsága), és hasonló módon számolható a harmadik test gravitációs vonzása is.

Ha az egész rendszer állandó ω szögsebességgel forog, akkor az 1-es jelű test gyorsulása $-\boldsymbol{r}_1\omega^2$, a mozgásegyenlete tehát

$$-m_1\boldsymbol{r}_1\omega^2=f\frac{m_1m_2}{d_{12}^3}(\boldsymbol{r}_2-\boldsymbol{r}_1)+f\frac{m_1m_3}{d_{13}^3}(\boldsymbol{r}_3-\boldsymbol{r}_1).$$

Ez (1) felhasználásával, majd egyenletrendezéssel a következő alakra hozható:

$$\boldsymbol{r}_1\left(\frac{\omega^2}{f}-\frac{m_1+m_3}{d_{13}^3}-\frac{m_2}{d_{12}^3}\right)=\boldsymbol{r}_2\left(\frac{1}{d_{13}^3}-\frac{1}{d_{12}^3}\right)m_2. \tag{2}$$

Mivel a fenti egyenletben $\boldsymbol{r}_1$ és $\boldsymbol{r}_2$ iránya különböző, (2) csak úgy állhat fenn, ha benne mindkét vektor együtthatója nulla:

$$d_{12}=d_{13}=d \qquad \text{és} \qquad d^3\omega^2=f(m_1+m_2+m_3).$$

A másik két test mozgásegyenlete hasonlóan (az indexek felcserélésével) írható fel, s ezekből a $d_{12}=d_{13}=d_{23}=d$ feltétel adódik. (Eddig sehol nem használtuk ki a feladat szövegében közölt azon információt, miszerint a három test szabályos háromszöget alkotva forog, de látható, hogy a mozgásegyenletek csak ilyen elrendezéssel állnak összhangban.) A forgás szögsebessége

$$\omega=\sqrt{f\frac{m_1+m_2+m_3}{d^3}}$$

kell legyen.

Megjegyzés. Ha a három test közül az egyik tömege sokkal nagyobb, mint a másik kettőé, akkor a rendszer tömegközéppontja gyakorlatilag a nagy tömegű testtel esik egybe. Ilyenkor a másik két test a nagy tömegű test körül szabályos háromszöget alkotva kering, egyikük a másikhoz képest 60°-os szögben lemaradva vagy azt megelőzve az ún. Lagrange-féle pontok valamelyikében mozog. A Nap–Jupiter rendszer Lagrange-pontjaiban ténylegesen megtalálható égitestek az ún. trójai kisbolygók.