I. megoldás. A bizonyítást teljes indukcióval végezzük. Az állítás $n=1$-re igaz, hiszen $\frac{1^3}{1}=2\cdot 1^2-1$.
Tegyük fel, hogy az állítás igaz n-re:

$$\frac{1^3+3^3+5^3+\ldots+(2n-1)^3}{1+3+5+\ldots+(2n-1)}=2n^2-1.$$

Ekkor $1+3+5+\ldots+(2n-1)=\frac{(1+(2n-1))\cdot n}{2}=n^2$ miatt

$$1^3+3^3+5^3+\ldots+(2n-1)^3=(2n^2-1)n^2.$$

Ezt felhasználva

(1) $$1^3+3^3+5^3+\ldots+(2n-1)^3+(2n+1)^3=(2n^2-1)n^2+(2n+1)^3.$$

Ha az állítást felírjuk $(n+1)$-re, majd a bal oldal nevezőjével beszorozzuk mindkét oldalt, a következőt kapjuk:

$$1^3+3^3+5^3+\ldots+(2n-1)^3+(2n+1)^3=\big(2(n+1)^2-1\big)(n+1)^2.$$

Ebbe beírva (1)-et:

$$(2n^2-1)n^2+(2n+1)^3=\big(2(n+1)^2-1\big)(n+1)^2,$$

végül a zárójeleket felbontva

$$2n^4+8n^3+11n^2+6n+1=2n^4+8n^3+11n^2+6n+1,$$

ami azonosság. Tehát az állítás valóban igaz tetszőleges n esetén.

II. megoldás. Tudjuk, hogy $1+3+5+\ldots+(2n-1)=\frac{1+(2n-1)}{2}\cdot n=n^2$. Próbáljuk meg a köbös részt is egyszerűbb alakra hozni, azt felhasználva, hogy $1^3+2^3+\ldots+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$:

$$1^3+3^3+5^3+\ldots+(2n-1)^3=1^3+2^3+\ldots(2n)^3-\left[2^3+4^3+\ldots+(2n)^3\right]=$$

$$=\left[\frac{2n(2n+1)}{2}\right]^2-8(1^3+2^3+\ldots+n^3)=n^2(2n+1)^2-8\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2=$$

$$=n^2(2n+1)^2-2n^2(n+1)^2=n^2(4n^2+4n+1-2n^2-4n-2)=n^2(2n^2-1).$$

A bizonyítandó egyenlőség bal oldala:

$$\frac{1^3+3^3+\ldots+(2n-1)^3}{1+3+\ldots+(2n-1)}=\frac{n^2(2n^2-1)}{n^2}=2n^2-1.$$

Az állítást igazoltuk.