Megoldás. Először teljes indukcióval belátjuk, hogy tetszőleges $0 \le j \le i$ esetén:

$$a_{i+j} + a_{i-j} = 2a_i a_j. \tag{1}$$

$j = 0$–ra, $j = 1$-re az állítás a sorozat képzési szabálya szerint igaz.

Tegyük fel, hogy (1) minden 0 és j közötti indexre igaz; belátjuk, hogy akkor $(j+1)$-re is teljesül:

$$a_{i+j+1} + a_{i-j-1} = \frac{2}{3}a_{i+j} - a_{i+j-1} + \frac{2}{3}a_{i-j} - a_{i-j+1} = \frac{2}{3}(2a_i a_j) - 2a_i a_{j-1} =$$

$$= 2a_i\left(\frac{2}{3}a_j - a_{j-1}\right) = 2a_i a_{j+1}.$$

Az $i = 4n$, $j = 3n$ választással (1)-ből azt kapjuk, hogy $a_{7n} + a_n = 2a_{4n}a_{3n}$.

$i = 2n$, $j = 2n$ mellett azt kapjuk, hogy $a_{4n} + a_0 = 2a_{2n}^2$. Ehhez hasonlóan $a_{2n} + a_0 = 2a_n^2$, végül $i = 2n$, $j = n$ választással $a_{3n} + a_n = 2a_{2n}a_n$.

Ezeket az egyenleteket felhasználva a_{7n} felírható csak a_n segítségével:

$$a_{7n} = a_n(64a_n^6 - 112a_n^4 + 56a_n^2 - 7).$$

$n = 5$ és $n = 35$-re ebből azt kapjuk, hogy:

$$a_{35} = a_5(64a_5^6 - 112a_5^4 + 56a_5^2 - 7), \quad a_{245} = a_{35}(64a_{35}^6 - 112a_{35}^4 + 56a_{35}^2 - 7).$$

A képzési szabály alapján kiszámítható, hogy $a_5 = \dfrac{241}{243}$. Vizsgáljuk meg, milyen pontossággal kell a_5, illetve a_{35} értékét a képletbe helyettesíteni, hogy a_{245}-öt 10^{-5} pontossággal ismerjük. Ha a_5-öt 10^{-m} pontossággal írjuk be, akkor a_{35}-öt legalább $(1 + 6\cdot 64 + 4\cdot 112 + 2\cdot 56)10^{-m}$ azaz legalább 10^{-m+3} pontossággal kapjuk meg a hibaszámítás szabályai miatt. Felhasználtuk, hogy $a_5 < 5$ valamint azt, hogy $64a_5^6 - 112a_5^4 + 56a_5^2 - 7 < 1$, és mindenhol felülről becsültük a hibát. Ezért, ha azt akarjuk, hogy a_{245} ötödik tizedesjegyében legfeljebb 1-et tévedjünk, akkor biztosan elég, ha a_5-öt 12 jegy pontossággal számoljuk.

Kiindulva abból, hogy $a_5 = 0{,}991\,769\,547\,325$, kapjuk, hogy $a_{245} \approx 0{,}999\,97$, tehát $0{,}999\,95 < a_{245} < 0{,}999\,99$.

Ezzel beláttuk, hogy a sorozatnak van 0,9999-nél nagyobb eleme.