I. megoldás. Jelöljük a lábos tömegét m-mel, a tömegközéppontjának magasságát (üres állapotban) h-val, az alapterületét A-val, a víz sűrűségét pedig ϱ-val!

Ha a lábosban x magasságban áll a víz, ennek a vízmennyiségnek a tömege $M = Ax\varrho$, tömegközéppontja pedig (a lábos aljától mérve) $\frac{x}{2}$ magasan van. A lábos és a víz közös tömegközéppontjának y magassága a rendszer két részének tömegközéppontjából, azok súlyozott közepeként számítható:

$$y = \frac{mh + M\frac{x}{2}}{m+M},$$

amely M behelyettesítése után

$$y = \frac{mh + A\varrho\frac{x^2}{2}}{m + Ax\varrho} = \frac{\frac{m}{A\varrho}h + \frac{x^2}{2}}{\frac{m}{A\varrho} + x}$$

alakra hozható. Érdemes használni a $H = \dfrac{m}{A\varrho}$ jelölést, ezzel az alábbi képletet kapjuk:

$$y = \frac{2Hh + x^2}{2(H+x)}. \tag{1}$$

(H szemléletes jelentése: a lábosba töltött H magasságú víz tömege éppen a lábos tömegével egyezik meg.) A feladat számadataival $H = 3{,}18$ cm és $h = 10$ cm.

A feladat kérdésének matematikai megfogalmazása: milyen x értéknél veszi fel az (1) egyenlettel megadott $y(x)$ függvény a legkisebb értékét, hol van a minimuma. Erre a kérdésre grafikus ábrázolással, numerikus módszerekkel, differenciálszámítással, vagy egyéb úton kereshetjük a választ. Az alábbiakban egy elemi módszert követve határozzuk meg a függvény szélsőértékét.

Írjuk át (1)-et

$$x^2 - (2y)\,x + 2H(h-y) = 0 \tag{2}$$

alakra, és tekintsük benne x-et ismeretlennek, y-t pedig adott értékűnek! A (2) egyenlet x-re nézve másodfokú, amelynek csak akkor van valós megoldása, ha a diszkriminánsa nemnegatív, azaz teljesül az $y^2 - 2H(h-y) \ge 0$ egyenlőtlenség. Ennek megoldása:

$$y \le -\sqrt{H(H+2h)} - H = -11{,}7 \text{ cm},$$

vagy

$$y \ge \sqrt{H(H+2h)} - H = 5{,}5 \text{ cm} = y_{\min}.$$

Az első lehetőség számunkra érdektelen, hiszen $y > 0$, így csak a második eset valósulhat meg. Látható, hogy $y_{\min}$ a közös tömegközéppont legmélyebb helyzetét adja meg, tehát éppen a feladatban feltett első kérdésre ad választ.

Ha $y = y_{\min}$, akkor (2) megoldása: $x = y_{\min} = 5{,}4$ cm, tehát a közös tömegközéppont legmélyebb helyzeténél a víz felszíne éppen a közös tömegközépponttal megegyező magasságban van.

II. megoldás. Ha valamekkora vízmagasságnál a közös tömegközéppont a víz felszíne felett van, akkor egy kevés víz hozzátöltésével a tömegközéppont magassága csökkenthető (hiszen a hozzátöltött víz a rendszer tömegközéppontja alá kerül). Ha viszont a közös tömegközéppont a víz felszíne fölé kerül, akkor a további víz hozzáadása növeli a közös tömegközéppont magasságát (mert a hozzátöltött víz a rendszer tömegközéppontja fölé kerül). A közös tömegközéppont akkor van a legalacsonyabban, amikor éppen a víz felszínével megegyező magasságba kerül.

Az I. megoldás jelöléseit használva az (1) egyenletet $y = x$ esetre történő megoldása adja meg y legkisebb értékét. Ez a feltétel egy másodfokú egyenletre vezet, aminek pozitív megoldása:

$$x = y = \sqrt{H(H+2h)} - H = 5{,}5 \text{ cm}.$$