Megoldás. A folyamat során a pozitron és az elektron teljes (mozgási + nyugalmi) energiája alakul át a fotonok energiájává, összimpulzusuk pedig a fotonok összimpulzusával egyezik meg.

A pozitron sebessége összemérhető a fénysebességgel, ezért a relativisztikus energia- és impulzus-képleteket kell alkalmaznunk. Ha a pozitron nyugalmi tömegét m-mel jelöljük (ugyanekkora az elektron nyugalmi tömege is), akkor a pozitron összenergiája:

$$E_+ = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{5}{4}mc^2,$$

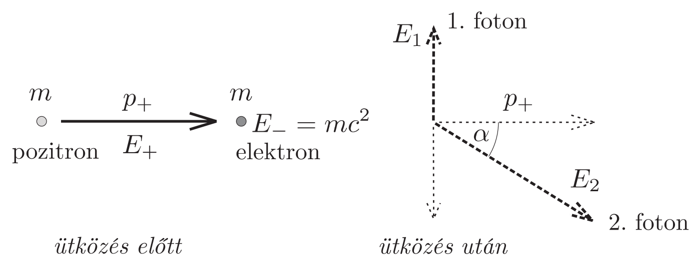
impulzusa pedig:

$$p_+ = \frac{mv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{3}{4}mc.$$

A nyugvó elektron energiája:

$$E_- = mc^2,$$

impulzusa pedig nulla.



Ha a keletkező fotonok energiáját E_1-gyel, illetve E_2-vel jelöljük, az impulzusuk

$$p_1 = \frac{E_1}{c} \qquad \text{és} \qquad p_2 = \frac{E_2}{c}.$$

Ha az 1. számú foton mozog a pozitron mozgásirányára merőlegesen, a 2. számú pedig a pozitron mozgásirányához viszonyított α szögben (lásd az *ábrát!*), akkor az energia- és impulzusmegmaradás egyenletei:

(1) $$E_1 + E_2 = E_+ + E_- = \frac{9}{4}mc^2,$$

(2) $$\frac{E_1}{c} = \frac{E_2}{c}\sin\alpha,$$

(3) $$\frac{E_2}{c}\cos\alpha = p_+ = \frac{3}{4}mc.$$

E_1-t (2)-ből kifejezve és (1)-be helyettesítve kapjuk:

(4) $$E_2(1+\sin\alpha) = \frac{9}{4}mc^2,$$

(3)-ból pedig:

(5) $$E_2\cos\alpha = \frac{3}{4}mc^2.$$

A fenti két egyenletet elosztva egymással

$$\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha} = 3$$

adódik, ami így is írható:

$$\frac{1+\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}} = \sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}} = 3.$$

Ebből megkapjuk a 2. foton impulzusának irányát:

$$\sin\alpha = \frac{4}{5}, \qquad \alpha = 53{,}1^\circ,$$

továbbá (2)-ből kiszámíthatjuk a fotonok energiájának arányát:

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{4}{5}.$$