Megoldás. *a*) Alkalmazzuk az energiamegmaradás törvényét a kicsiny test körpályán történő (de várhatóan nem harmonikus) rezgőmozgására! A rendszer energiája a gravitációs helyzeti energiából, az elektrosztatikus potenciális energiából és a mozgási energiából tevődik össze. A legmélyebb helyzetben a kicsiny test gravitációs helyzeti energiáját választhatjuk nullának. Ekkor a kiindulási helyzetben a gravitációs energia:

$$mgl\sin 30^\circ = \frac{mgl}{2}.$$

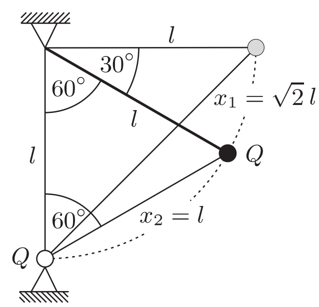
A mozgási energia mind a kezdeti helyzetben, mind pedig a kicsiny test legmélyebb helyzetében nulla, így a továbbiakban figyelmen kívül hagyható. Az elektroszatikus energia $k\frac{Q^2}{x}$ alakban írható, ahol x a két töltés pillanatnyi távolsága, k pedig a Coulomb-törvényben szereplő állandó. A kezdeti helyzetben (az l befogójú egyenlő szárú derékszögű háromszögből) $x_1 = \sqrt{2}\,l$, a legmélyebb helyzetben pedig (az l oldalhosszúságú, egyenlő oldalú háromszögből adódóan) $x_2 = l$ (*1. ábra*). Az energiamegmaradás tétele szerint

$$k\frac{Q^2}{x_1} + \frac{mgl}{2} = k\frac{Q^2}{x_2},$$

ahonnan (x_1 és x_2 fenti értékeinek behelyettesítése és egyenletrendezés után)

$$m = \frac{kQ^2}{g\ell^2}\left(2-\sqrt{2}\right) \qquad (1)$$

adódik.



1. ábra

b) A kicsiny testre a legmélyebb helyzetében az mg gravitációs erő, a töltések közötti

$$F = k\frac{Q^2}{x_2^2} = k\frac{Q^2}{l^2}$$

nagyságú elektromos taszítóerő és a keresett K fonálerő hat (*2. ábra*). Ezen erők fonál irányú komponenseinek előjeles összege nulla kell legyen, hiszen az éppen álló test sugár irányú (centripetális) gyorsulása nulla. Eszerint

$$K - \frac{1}{2}mg - \frac{1}{2}F = 0.$$

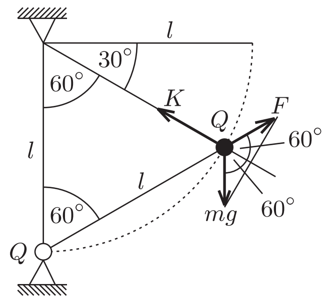
(Kihasználtuk, hogy a kérdéses helyzetben mind a nehézségi erő, mind pedig az elektromos taszítóerő 60°-os szöget zár be a fonállal, fonál irányú vetületük tehát a nagyságuk $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$-szerese.) A fenti egyenletből a fonálerőre (az (1) összefüggést is felhasználva)

$$K = \frac{1}{2}mg + \frac{1}{2}F = \frac{1}{2}mg + k\frac{Q^2}{2l^2} = k\frac{Q^2}{l^2}\,\frac{3-\sqrt{2}}{2}$$

adódik. Ez az erő

$$K = \frac{3-\sqrt{2}}{2\left(2-\sqrt{2}\right)}mg = \left(1+\frac{\sqrt{2}}{4}\right)mg \approx 1{,}35\,mg$$

alakban is megadható.



2. ábra

c) A test gyorsulása az alsó helyzetben a körpálya érintőjének irányában *felfelé* mutat, nagysága a Newton-egyenletből és az (1) összefüggésből számítható:

$$a_{\text{lent}} = \frac{F \cdot \cos 30° - mg \cdot \cos 30°}{m} = \left(k\frac{Q^2}{ml^2} - g\right)\frac{\sqrt{3}}{2} =$$

$$= \left(\frac{1}{2-\sqrt{2}} - 1\right) g = \frac{\sqrt{6}}{4} g \approx 0{,}61\, g.$$

Hasonló módon kaphatjuk meg a test gyorsulását a kezdeti (legfelső) helyzetében. A gyorsulás itt is a körpálya érintőjének irányába mutat, nagysága:

$$a_{\text{fent}} = \frac{mg - k\frac{Q^2}{\left(\sqrt{2}\,l\right)^2}\cos 45°}{m} = g - k\frac{Q^2}{ml^2}\frac{\sqrt{2}}{4} =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2-\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{4}\right) g = \left(\frac{3-\sqrt{2}}{4}\right) g \approx 0{,}40\, g.$$

Jól látható, hogy $a_{\text{fent}} \neq a_{\text{lent}}$, tehát a kicsiny test mozgása valóban nem harmonikus rezgőmozgás. A két gyorsulás aránya:

$$\frac{a_{\text{lent}}}{a_{\text{fent}}} = \frac{\sqrt{6}}{3-\sqrt{2}} \approx 0{,}65.$$