I. megoldás. Jelöljük az ütközés előtti sebességvektorokat $\boldsymbol{v}_1$-gyel és $\boldsymbol{v}_2$-vel, az ütközés utáni sebességvektorokat pedig $\boldsymbol{v}_1'$-vel és $\boldsymbol{v}_2'$-vel, a héliumatomok tömegét pedig m-mel! A feladat szövege szerint $|\boldsymbol{v}_1| = v_1 = 800$ m/s és $|\boldsymbol{v}_2| = v_2 = 600$ m/s.

A rugalmas ütközés során megmarad az ütköző molekulák összimpulzusa és összenergiája:

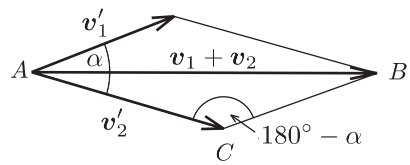
$$m\boldsymbol{v}_1 + m\boldsymbol{v}_2 = m\boldsymbol{v}_1' + m\boldsymbol{v}_2',$$

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2 = \frac{1}{2}mv_1'^2 + \frac{1}{2}mv_2'^2,$$

azaz

$$\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{v}_1' + \boldsymbol{v}_2', \tag{1}$$

$$v_1^2 + v_2^2 = v_1'^2 + v_2'^2. \tag{2}$$



Az impulzusmegmaradást kifejező egyenletet az *ábrán* látható vektorösszeggel is szemléltethetjük. Tudjuk, hogy az ütközés előtti sebességek azonos irányúak, emiatt fennáll:

$$|\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2|^2 = (v_1 + v_2)^2.$$

Írjuk most fel az ABC háromszögre a koszinusz-tételt:

$$v_1'^2 + v_2'^2 - 2v_1'v_2'\cos(180° - \alpha) = (v_1 + v_2)^2, \tag{3}$$

ahonnan az ütközés utáni sebességvektorok keresett α szögének koszinusza kifejezhető:

$$\cos\alpha = \frac{\left[v_1^2 + v_2^2 - v_1'^2 - v_2'^2\right] + 2v_1v_2}{2v_1'v_2'}. \tag{4}$$

A szögletes zárójelben álló kifejezés (2) miatt nulla, így (4) a következő egyszerű alakba írható:

$$\cos\alpha = \frac{v_1v_2}{v_1'v_2'}. \tag{5}$$

Alkalmazzuk a mértani- és a négyzetes közepekre vonatkozó

$$v_1'v_2' \le \frac{v_1'^2 + v_2'^2}{2}$$

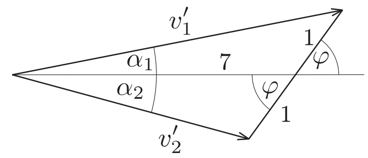
egyenlőtlenséget, amely $\left(v_1' - v_2'\right)^2 \ge 0$ nyilvánvaló következménye! Ennek segítségével és (2) kihasználásával (5) így alakul:

$$\cos\alpha \ge \frac{2v_1v_2}{v_1'^2 + v_2'^2} = \frac{2v_1v_2}{v_1^2 + v_2^2} = \frac{2\cdot 800\cdot 600}{800^2 + 600^2} = 0{,}96,$$

ahonnan $\alpha \le 16{,}26°$. A héliumatomok ütközés utáni sebessége tehát legfeljebb ekkora szöget zárhat be egymással, és az egyenlőség akkor áll fenn, amikor $v_1' = v_2'$.

II. megoldás. Vizsgáljuk a folyamatot a $\dfrac{v_1 + v_2}{2} = 700\ \dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ sebességgel mozgó tömegközépponti rendszerből! Innen nézve a két atom ugyanakkora, $100\ \dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ nagyságú, de ellentétes irányú sebességgel közeledik egymáshoz. Az ütközés után is egymással ellentétes irányban, változatlan nagyságú sebességgel kell mozognjanak, csak így teljesülhet az energiamegmaradás és az impulzusmegmaradás törvénye.

Az eredeti koordináta-rendszerbe úgy térhetünk vissza, ha a tömegközépponti rendszerbeli sebességekhez hozzáadjuk a tömegközéppont $700\ \dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ nagyságú sebességét (lásd az *ábrát,* melyet az áttekinthetőség kedvéért 100-szorosan lecsökkentett sebességnagyságokkal rajzoltunk fel).



A feladat hátralévő részében azt vizsgáljuk, hogy φ függvényében milyen értékeket vehet fel az $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$ szög. Számítsuk ki $\operatorname{tg}\alpha$-t az addíciós tétel felhasználásával:

$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(\alpha_1 + \alpha_2) = \frac{\operatorname{tg}\alpha_1 + \operatorname{tg}\alpha_2}{1 - \operatorname{tg}\alpha_1 \operatorname{tg}\alpha_2} = \frac{\dfrac{\sin\varphi}{7+\cos\varphi} + \dfrac{\sin\varphi}{7-\cos\varphi}}{1 - \dfrac{\sin\varphi}{7+\cos\varphi}\,\dfrac{\sin\varphi}{7-\cos\varphi}} = \frac{7}{24}\sin\varphi.$$

Látható, hogy a $0 \le \varphi \le 180^\circ$ értelmezési tartományban $0 \le \operatorname{tg}\alpha \le \dfrac{7}{24}$, vagyis $0 \le \alpha \le 16{,}26^\circ$. Az ütközés utáni sebességvektorok szöge akkor maximális, amikor $\varphi = 90^\circ$, ilyenkor $v_1' = v_2'$.