I. megoldás. A megoldást a $[0;2\pi)$ intervallumon keresve világos, hogy $x\neq 0$, így $\frac{x}{2}\neq 0,\pi$, azaz $\sin\frac{x}{2}\neq 0$. Az egyenlet ezért ekvivalens a

$$2\cos 5x\sin\frac{x}{2}+2\cos 4x\sin\frac{x}{2}+2\cos 3x\sin\frac{x}{2}+2\cos 2x\sin\frac{x}{2}+$$

$$+2\cos x\sin\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}=0 \qquad (x\neq 0)$$

egyenlettel. Alakítsuk át az egyenlet bal oldalát a tetszőleges k (egész) számra érvényes (a szinusz függvény addíciós képletéből következő)

$$\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)\alpha-\sin\left(k-\frac{1}{2}\right)\alpha=2\cos k\alpha\sin\frac{\alpha}{2}$$

azonosság felhasználásával az $\alpha=x$, $k=1,2,3,4,5$ szereposztásban:

$$\left(\sin\left(5+\frac{1}{2}\right)x-\sin\left(5-\frac{1}{2}\right)x\right)+\left(\sin\left(4+\frac{1}{2}\right)x-\sin\left(4-\frac{1}{2}\right)x\right)+$$

$$+\left(\sin\left(3+\frac{1}{2}\right)x-\sin\left(3-\frac{1}{2}\right)x\right)+\left(\sin\left(2+\frac{1}{2}\right)x-\sin\left(2-\frac{1}{2}\right)x\right)+$$

$$+\left(\sin\left(1+\frac{1}{2}\right)x-\sin\left(1-\frac{1}{2}\right)x\right)+\sin\frac{x}{2}=\sin\frac{11}{2}x=0\,.$$

A $\sin\frac{11}{2}x=0$ egyenlet nemnulla megoldásait keressük tehát $[0;2\pi)$-ben: $\frac{11}{2}x=\pi t$, $x=\frac{2t\pi}{11}=\frac{2\pi}{11}, \frac{4\pi}{11}, \frac{6\pi}{11}, \frac{8\pi}{11}, \frac{10\pi}{11}, \frac{12\pi}{11}, \frac{14\pi}{11}, \frac{16\pi}{11}, \frac{18\pi}{11}, \frac{20\pi}{11}$.

II. megoldás. Az $\varepsilon=\cos x+i\sin x$ komplex szám k-adik hatványa tetszőleges k egészre a Moivre-képlet szerint $\varepsilon^k=\cos kx+i\sin kx$; továbbá $(\cos kx+i\sin kx)+\big(\cos(-kx)+i\sin(-kx)\big)=2\cos kx$. Egyenletünk bal oldala ezek szerint az

$$S=\varepsilon^{-5}+\varepsilon^{-4}+\varepsilon^{-3}+\varepsilon^{-2}+\varepsilon^{-1}+1+\varepsilon+\varepsilon^2+\varepsilon^3+\varepsilon^4+\varepsilon^5$$

összegnek a valós része; ez maga az S, mivel S képzetes része a szinusz függvény páratlansága miatt nulla. A mértani sorozat összegképlete szerint:

$$S=\frac{\varepsilon^6-\varepsilon^{-5}}{\varepsilon-1}\,,$$

így a feladat egyenlete egyenértékű az $\varepsilon^6=\varepsilon^{-5}$, $\varepsilon\neq 1$, illetve az $\varepsilon^{11}=1\neq\varepsilon$ egyenlettel. Ennek megoldásai:

$$\varepsilon=\cos\frac{2t\pi}{11}+i\sin\frac{2t\pi}{11}, \quad \text{azaz} \quad x=\frac{2t\pi}{11}, \quad t=1,2,\ldots,10.$$

III. megoldás. Először megmutatjuk, hogy $x=\frac{2\pi}{11}$ megoldása az egyenletnek. Vegyünk fel a síkbeli derékszögű koordinátarendszerben egy szabályos 11-szöget, melynek középpontja az origó, csúcsai pedig pozitív körüljárás szerint $A_0, A_1, \ldots, A_{10}$, ahol A_0 az $(1;0)$ pont. Ekkor A_k első koordinátája éppen $\cos\frac{2k\pi}{11}$ lesz, vagyis az A_i pontok első koordinátáinak összege éppen

$$2\cos 5x+2\cos 4x+2\cos 3x+2\cos 2x+2\cos x+1.$$

Az O körüli $\frac{2\pi}{11}$ szögű elforgatás az $\overrightarrow{OA_i}$ vektorok mindegyikét a rákövetkezőbe viszi, ezért a vektorok összege 0, amiért is az A_i pontok első koordinátáinak összege is 0. Ugyanez a gondolatmenet azt is kiadja, hogy minden $1\le k\le 10$ esetén $x=\frac{2k\pi}{11}$ megoldása lesz az egyenletnek. Természetesen minden megoldáshoz 2π egész számú többszörösét hozzáadva újabb megoldásokat kapunk, vagyis minden olyan k egész számra, amely 11-gyel nem osztható, $x=\frac{2k\pi}{11}$ megoldása lesz az egyenletnek. Megmutatjuk, hogy más megoldás nincs.

Az addíciós képletek ismételt alkalmazásával kapjuk, hogy

$$\cos 2x=2\cos^2 x-1, \quad \cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x,$$

$$\cos 4x=8\cos^4 x-8\cos^2 x+1$$

és

$$\cos 5x=16\cos^5 x-20\cos^3 x+5\cos x.$$

Ezért x pontosan akkor megoldása az egyenletnek, ha $a = \cos x$ gyöke a

$$32a^5 + 16a^4 - 32a^3 - 12a^2 + 4a + 1 = 0$$

egyenletnek. A fent elmondottak miatt az

$$a_1 = \cos\frac{2\pi}{11}, \quad a_2 = \cos\frac{4\pi}{11}, \quad a_3 = \cos\frac{6\pi}{11}, \quad a_4 = \cos\frac{8\pi}{11}, \quad a_5 = \cos\frac{10\pi}{11}$$

számok az egyenletet kielégítik. Mivel ez öt különböző valós szám, a szóban forgó ötödfokú egyenletnek más megoldása már nem lehet. Mivel a fent felsorolt szögek éppen azok, amelyeknek koszinusza valamelyik a_i-vel egyenlő, az eredeti egyenletnek valóban megadtuk már az összes megoldását.