Megoldás. Az egyenlet ekvivalens az

$$x^n + \frac{n!}{(n-1)!}x^{n-1} + \ldots + \frac{n!}{1!}x + n! = 0$$

egyenlettel. A bal oldalon egy olyan egész együtthatós polinom áll, amelynek főegyütthatója 1, a többi együttható pedig n-nel osztható, hiszen x^k együtthatója $\frac{n!}{k!}$. A főegyüttható 1, ezért ha x az egyenlet racionális megoldása, akkor szükségképpen egész szám. Ha x egész megoldása az egyenletnek, akkor $n \mid x^n$. Mivel $n > 1$, így az n számnak létezik p prímosztója, amelyre az előzőek szerint $p \mid x^n$, és ezért $p \mid x$, vagyis a p prímszám az x kanonikus alakjában $\alpha \geq 1$ kitevővel szerepel. Jelölje β_k a p prímszám kitevőjét $k!$ prímtényezős felbontásában. A Legendre-formula szerint

$$\beta_k = \left[\frac{k}{p}\right] + \left[\frac{k}{p^2}\right] + \left[\frac{k}{p^3}\right] + \ldots,$$

valamint ha $k \geq 1$, akkor

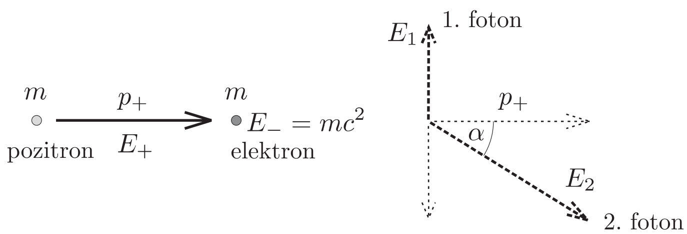
$$\beta_k = \sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{k}{p^i}\right] < \sum_{i=1}^{\infty} \frac{k}{p^i} \leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{k}{2^i} = k.$$

Az eddigieket használva, a p prímszám kitevője az $\frac{n!}{k!}x^k$ tagban $\beta_n - \beta_k + k\alpha \geq \beta_n - \beta_k + k > \beta_n$, ha $1 \leq k \leq n$. Tehát a fenti egyenlet átrendezésével kapott

$$x^n + \frac{n!}{(n-1)!}x^{n-1} + \ldots + \frac{n!}{1!}x = -n!$$

egyenlet bal oldalán minden tag, és így az összegük is a p prímszám β_n-nél magasabb kitevős hatványával osztható, míg a jobb oldalon álló kifejezés kanonikus alakjában p kitevője pontosan β_n.

Ez az ellentmondás mutatja, hogy az egyenletnek nem lehet racionális megoldása.



ütközés előtt　　*ütközés után*