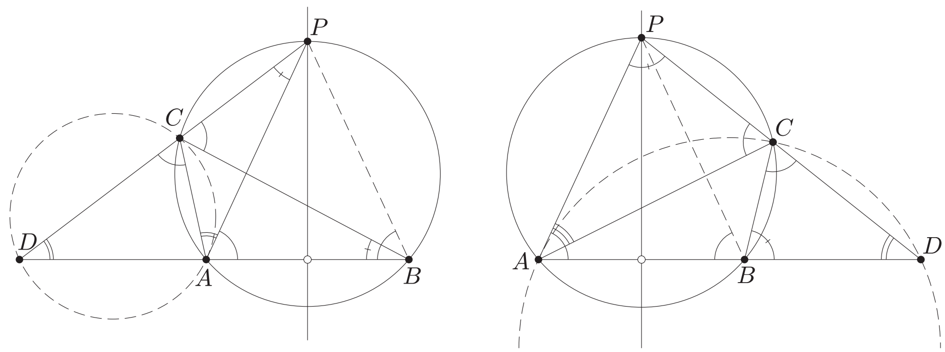
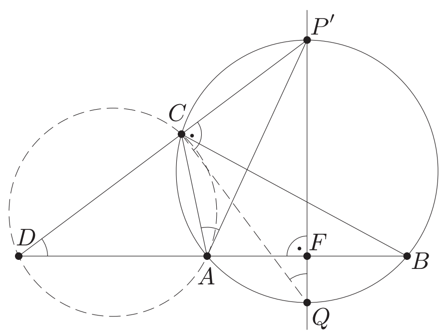
I. megoldás. Annak megfelelően, hogy a C pont A-hoz vagy B-hez van közelebb, két lényegileg különböző esetet kell figyelembe vennünk. Alábbi megoldásunk egyszerre működik mindkét esetben (lásd az *ábrákat*).



Az, hogy a DP egyenes külső szögfelező a C csúcsban, egyenérékű azzal, hogy a C-nél jelölt szögek egyenlők. Mivel az AP egyenes érinti az ADC kört, a kerületi szögek tétele miatt $ADC\sphericalangle = PAC\sphericalangle$. Ezen szögek egyenlőségéből adódik, hogy a DCB és az ACP háromszög hasonló. Így a B és a P csúcsoknál levő szögeik is egyenlők. Ez viszont azt jelenti, hogy az $ABCP$ négyszög húrnégyszög. Ebből következik, hogy az ABP háromszög A-nál és B-nél levő szöge is egyenlők egymással. Tehát az APB háromszög egyenlőszárú, vagyis P nem más, mint az ABC körív és az AB szakasz felezőmerőlegesének a metszéspontja.

A megfordításhoz tekintsük az AB szakasz felező merőlegesének egy tetszőleges olyan Q pontját, amely nem esik az AB szakaszra. Azt kell megmutatnunk, hogy ez a pont hozzátartozik a P pontok mértani helyéhez. Ám ha az ABQ háromszög köré írható kör rövidebbik QA ívén felveszünk egy C pontot úgy, hogy sem CA, sem CB ne legyen egyenlő AB-vel, akkor az elmondottak alapján világos, hogy az ehhez tartozó P pont nem lehet más, mint Q. Tehát a mértani hely az AB szakasz felezőmerőlegese a felezőpontja kivételével.

II. megoldás. Az AB szakasz felezőmerőlegese messe az ABC kör ACB ívét P'-ben, a másik ívét Q-ban. Az AB szakasz felezőpontját jelölje F. Bebizonyítjuk, hogy a C-beli külső szögfelező és az A-beli érintő is átmegy P'-n, vagyis $P' = P$.



$ACQ\sphericalangle = QCB\sphericalangle$, mivel egyenlő íveken nyugvó kerületi szögek, így CQ az $ACB\sphericalangle$ belső szögfelezője. A C-beli külső szögfelező merőleges a belsőre, amire CP' is merőleges a Thalesz-tétel miatt. Így ezek egy egyenesbe esnek, tehát a külső szögfelező átmegy P'-n.

Tekintsük a $P'FD$ és $P'CQ$ háromszögeket. A P'-nél levő szögük megegyezik, és van még egy-egy derékszögük. Tehát a D és Q csúcsuknál levő szögeik is egyenlők. Utóbbi továbbá egyenlő az A pontnál megjelölt szöggel, mivel azonos ívhez tartozó kerületi szögek.

Azt kaptuk, hogy a D-nél és A-nál a jelölt szögek egyenlők. Az előbbi az ACD háromszög körülírt körében az AC-hez tartozó kerületi szög. Tudjuk, hogy ezzel egyenlő az A-ban a körhöz húzott érintő AC egyenessel bezárt szöge, tehát ez az érintő csak AP' lehet.

(A $P'BC\sphericalangle$ is egyenlő a Q-nál levő szöggel, tehát a BCD körhöz B-ben húzott érintő is átmegy P'-n. Vagyis, ha felcseréljük A-t és B-t, akkor is igaz lesz, hogy $P = P'$. Tehát ha C közelebb van A-hoz, mint B-hez, akkor is működik a bizonyítás.)

Tehát minden C pont esetén az a pont lesz P, amit az ACB körív kimetsz AB felezőmerőlegeséből. Amíg C befutja a sík pontjait (legalábbis amire ABC nem egyenlőszárú háromszög), a kimetszett P pontok a felezőmerőleges összes pontját kiadják, AB felezőpontját leszámítva. Tehát a mértani hely az AB szakasz felezőmerőlegese a felezőpontja kivételével.