Megoldás. Mivel a két üveglemez elég kis szöget zár be egymással, a köztük felemelkedő víz felületét jó közelítéssel vehetjük félhenger alakúnak. Így felírhatjuk (a félhenger sugarát r-rel jelölve):

$$\varphi \approx \operatorname{tg}\varphi = \frac{r}{h-H}.$$

Mechanikai egyensúly esetén a víz felületi feszültségéből adódó görbületi nyomásnak és a felemelkedett vízoszlop H magasságának megfelelő hidrosztatikai nyomásnak meg kell egyeznie, vagyis

$$\frac{\sigma}{r} = H\varrho g.$$

(Azért nem $\frac{2\sigma}{r}$ a görbületi nyomás, mert a felszín nem gömb, hanem henger alakú.)

Amíg $\frac{\sigma}{r} > H\varrho g$, addig a folyadékszint még emelkedik az üveglapok között. Ha pedig már túlfutott és $H\varrho g > \frac{\sigma}{r}$ lett, akkor a vízszint csökkenni kezd. A kialakuló állapot *stabil* egyensúlyi állapot kell, hogy legyen.

Vizsgáljuk meg, milyen H értékre teljesül a

$$\frac{\sigma}{(h-H)\varphi} = H\varrho g$$

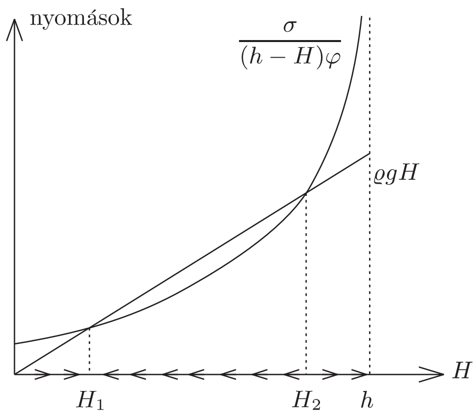
egyensúlyi feltétel! Átalakítva és az ismert adatokat behelyettesítve

$$H(h-H) = \frac{\sigma}{\varrho g\varphi} = 1{,}4\cdot 10^{-4}\ \mathrm{m}^2 = 140\ \mathrm{mm}^2.$$

A magasságokat mm-ben mérve az alábbi másodfokú egyenletet kell megoldanunk:

$$H^2 - hH + 140 = 0.$$

Ennek $h = 30$ mm esetén két megoldása lesz: $H_1 = 5{,}8$ mm és $H_2 = 24{,}2$ mm. E kettő közül azonban csak az egyik, a kisebb érték a stabil, a másik instabil egyensúlyi állapotot határoz meg! A stabilitási viszonyokat is megvizsgálhatjuk, ha H függvényében ábrázoljuk a ϱgH és a $\frac{\sigma}{(h-H)\varphi}$ kifejezéseket (*2. ábra*). Attól függően, hogy melyik kifejezés a nagyobb, a víz felszíne a bejelölt nyilacskáknak megfelelően fel- vagy lefelé mozog. Látható, hogy H_1 a stabil, H_2 pedig az instabil megoldás.



2. ábra

A fenti ábra addig helyes, amíg

$$h > \sqrt{4\cdot 140} = 23{,}7\ \mathrm{mm},$$

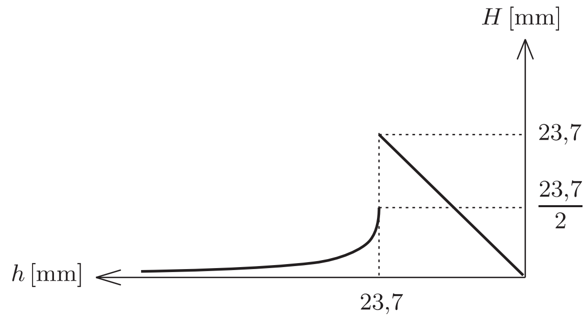
ekkor pozitív ugyanis a fenti másodfokú egyenlet diszkriminánsa.

De mi történik akkor, amikor az üveglapok lassú leengedése közben elérjük a $h = 23{,}7$ mm értéket, és még tovább süllyesztjük az üveglapokat? $h = 23{,}7$ mm esetén $H = \frac{h}{2}$ magasan áll a vízszint, majd a következő pillanatban (amikor a 2. ábrán látható hiperbolának és az egyenesnek már nem lesz metszéspontja, tehát a görbületi nyomás minden helyzetben nagyobb lesz, mint a hidrosztatikai nyomás) a víz emelkedni kezd és egészen a két üveglap érintkezéséig felszalad! Ettől kezdve $H = h$ lesz végig.

Hogyan változik H a fokozatosan csökkenő h függvényében? A választ a *3. ábra* mutatja, a kérdéses helyzetekben pedig a numerikus értékek:

a) $h = 30$ mm esetén $H = 5{,}8$ mm;

b) $h = 15$ mm esetén $H = 15$ mm.



3. ábra

Megjegyzések: A feladatra adott *hibás* megoldások közül három tipikusat érdemes külön is megemlíteni.

1. Többen a körkeresztmetszetű, függőleges hajszálcsőben felemelkedő vízre érvényes képletet próbálták meg itt alkalmazni. (Ekkor jelenik meg a $\frac{2\sigma}{r}$ görbületi nyomás!) Nem kaphattak helyes eredményt.

2. Sokan a felemelkedett vízmennyiség súlyát tették egyenlővé a felületi feszültségből származó, felfelé húzó erővel. Ez azért hibás, mert a ferde, nem függőleges üveglemezek által kifejtett nyomóerőnek is van függőleges összetevője, amit az erőegyensúlynál figyelembe kellene venni. A probléma hasonló ahhoz, ami a jól ismert hidrosztatikai paradoxonnál jelentkezik.

3. Néhányan energetikailag próbálták megoldani a feladatot úgy, hogy a felemelkedett víz helyzeti energiáját tették egyenlővé a felületi feszültség $\sigma \cdot \Delta A$ munkájával. Ez ugyanúgy hibás, mintha egy rugóra függesztett test egyensúlyi helyzetének meghatározásához a nehézségi erő és a rugóerő munkájának egyenlőségét írnánk fel. Jól tudjuk, hogy ez az egyenlőség csak a rugón rezgő test mozgásának szélső helyzeteire teljesül, ahol éppenhogy nincs a test egyensúlyban. Egyensúlyi állapotban a mozgási energia nem hanyagolható el, sőt, éppen akkor maximális!