Megoldás. A bal oldalon álló összeget növeljük a minden tagjára érvényes

$$\frac{1}{(2k+1)^2}=\frac{1}{4k^2+4k+1}<\frac{1}{4k^2+4k}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$

egyenlőtlenség felhasználásával. Eszerint az összeg kisebb, mint

$$\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)<\frac{1}{4}\,.$$

Megjegyzés. A négyzetszámok reciprokösszege Euler híres képlete szerint:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

(l. Simonovits András cikkét lapunk 2007. novemberi számában). Ebből egyszerűen belátható, hogy a feladathoz kapcsolódó végtelen összeg (sor) pontos értéke – vagyis az $\frac{1}{4}$ helyett kapható legjobb felső becslés:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}-1\approx 0{,}233\,701.$$