Megoldás. Azt állítjuk, hogy egy tetszőleges N számot $\binom{N-1}{2}$-féleképpen lehet felírni három pozitív egész szám összegeként, ha az összeadandók sorrendje is számít.

Ennek bizonyításához képzeljünk el N darab golyót egy sorban egymás mellé helyezve. Pontosan annyiféleképpen lehet az N-et három szám összegére bontani, ahányféleképpen az N golyót három csoportba tudjuk osztani úgy, hogy a csoportok sorrendje is számít. Ahhoz, hogy az N darab golyót három csoportba osszuk, a köztük levő $N-1$ darab – képzeletbeli – választóvonal közül kell kiválasztanunk kettőt. Ezt $\binom{N-1}{2}$-féleképpen tehetjük meg.

2007 nem írható fel ilyen alakban, de egy hozzá közeli szám, a 2016 igen: $2016 = \binom{65-1}{2}$.

A feladat azon feltételét, hogy 1 és k közötti számokra kell osztanunk a 2007-et, még nem vettük figyelembe.

Ha $k = N-1$, akkor a felírások száma ugyanúgy $\binom{N-1}{2}$, hiszen ekkor csak N-et nem használhatjuk fel, de eddig sem használtuk.

Ugyanez igaz $k = N-2$ esetén is.

Ha $k = N-3$, akkor nem számolhatjuk az $(N-2)$, 1, 1 esetet és ennek további kétféle sorbarendezését.

Ha $k = N-4$, akkor az előzőn kívül nem használhatjuk még az $(N-3)$, 2, 1 esetet, aminek összesen 6 permutációja van.

Ezért $k = N-4$-re az összes eset: $\binom{N-1}{2} - 3 - 6 = \binom{N-1}{2} - 9$. Mivel 2007 pontosan 9-cel kevesebb, mint 2016, azért $N = 65$ és $k = 65 - 4 = 61$ esetén a megfelelő felírások száma: $\binom{65-1}{2} - 9 = 2007$.

Megjegyzés. Általában, $2k > N$ és $N - 1 > k$ esetén a lehetséges felírások száma:

$$\binom{N-1}{2} - 3 \cdot \binom{N-1-k}{2}.$$

A jó esetek számát úgy kapjuk meg, ha az összes eset számából kivonjuk a rossz esetek számát, vagyis azon felbontások számát, ahol az egyik tag k-nál nagyobb. ($2k > N$ miatt csak az egyik tag lehet ilyen.)

A rossz eseteket kell összeszámolnunk. Tekintsük az előző golyókat, és vegyük először azokat az eseteket számba, amikor az első csoportban van k-nál több golyó. Ez azt jelenti, hogy a $(k+1)$-edik golyótól kezdve az N-edik golyóig a található $N-1-k$ képzeletbeli választóvonal közül kell 2-t kiválasztani, amit $\binom{N-1-k}{2}$-féleképpen tehetünk meg. A k-nál több golyót tartalmazó csoport nem csak az első lehet a három közül, ezért még 3-mal meg kell szorozni $\binom{N-1-k}{2}$-t.

Megoldás még: $N = 121$ és $k = 61$; $N = 71$ és $k = 53$; valamint $N = 91$ és $k = 53$.