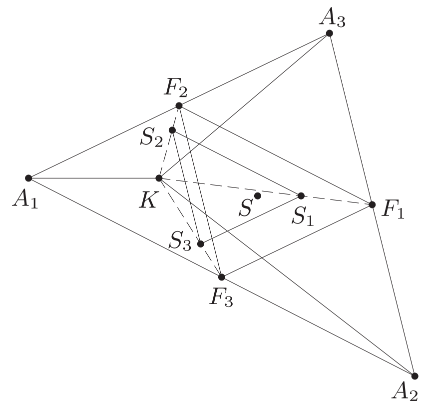
I. megoldás. Jelölje S az $A_1A_2A_3$ háromszög súlypontját, F_i pedig az A_jA_k oldal felezőpontját.



Mivel F_iF_j az $A_1A_2A_3\triangle$ középvonala, az F_iF_j párhuzamos A_iA_j-vel, és fele olyan hosszú. Emiatt az $A_1A_2A_3\triangle$-et egy S középpontú, $\lambda_1 = -\dfrac{1}{2}$ arányú hasonlósági transzformáció az $F_1F_2F_3\triangle$-be viszi.

Ugyanakkor $KS_i = 2S_iF_i$, és a K, S_i, F_i pontok egy egyenesbe esnek. Emiatt az $F_1F_2F_3\triangle$-et egy K középpontú, $\lambda_2 = \dfrac{2}{3}$ arányú hasonlósági transzformáció az $S_1S_2S_3\triangle$-be viszi. Így az $S_1S_2S_3$ háromszög oldalai párhuzamosak az $A_1A_2A_3$ háromszög megfelelő oldalaival, ezért az $A_1A_2A_3$ háromszöget egy ($\lambda_3 = \lambda_1 \cdot \lambda_2 = -\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{2}{3} = -\dfrac{1}{3}$ arányú) középpontos hasonlóság viszi át az $S_1S_2S_3$ háromszögbe, tehát a hasonlóság középpontján az A_iS_i szakaszok áthaladnak.

II. megoldás. F_1F_3 az $A_1A_2A_3\triangle$ középvonala, így $F_1F_3 = \dfrac{A_1A_3}{2}$ és a két szakasz párhuzamos. Tudjuk, hogy a súlypont a súlyvonal oldalhoz közelebbi harmadolópontja. Ezek alapján a $KF_1F_3\triangle$-ben a párhuzamos szelőszakaszok tételének megfordítása miatt:

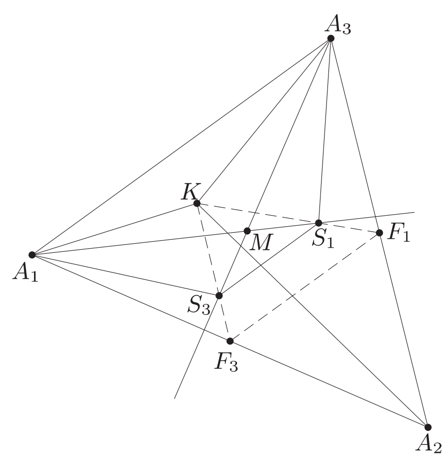
$$S_1S_3 = \frac{2}{3}F_1F_3 = \frac{2}{6}A_1A_3,$$

és $S_1S_3 \parallel F_1F_3$.

II. megoldás. Ezekből következik, hogy $A_1S_3S_1A_3$ trapéz, és alapjainak aránya

$$S_1S_3 : A_1A_3 = 1 : 3.$$

Tudjuk, hogy a trapéz átlói az alapok arányában osztják egymást, vagyis $S_3M : MA_3 = S_1M : MA_1 = 1 : 3$.



Hasonló gondolatmenettel belátható, hogy $A_1S_2S_1A_2$ trapéz, és átlóinak metszéspontját N-nel jelölve $S_2N : NA_2 = S_1N : NA_1 = 1 : 3$.

Mivel $S_1M : MA_1 = S_1N : NA_1 = 1 : 3$, azért $M = N$, tehát a három szakasz valóban egy ponton halad át.

III. megoldás. Tekintsünk a síkon egy tetszőleges O pontot, és indítsunk vektorokat O-ból az A_i, S_i illetve K pontokba. A vektorokat jelöljük a megfelelő kisbetűkkel.

Mivel S_i a KA_jA_k háromszög súlypontja, a következőképpen írható fel vektorokkal:

$$\mathbf{s}_i = \frac{\mathbf{a}_j + \mathbf{a}_k + \mathbf{k}}{3}.$$

Tekintsük az A_iS_i szakaszok S_i-hez közelebbi negyedelőpontját, melyet jelöljön P. A P pontba mutató vektor így írható fel:

$$\mathbf{p}=\frac{\mathbf{a}_i+3\mathbf{s}_i}{4}=\frac{\mathbf{a}_i+3\left(\frac{\mathbf{a}_j+\mathbf{a}_k+\mathbf{k}}{3}\right)}{4}=\frac{\mathbf{a}_i+\mathbf{a}_j+\mathbf{a}_k+\mathbf{k}}{4}.$$

Ez független i választásától, tehát az A_iS_i szakaszok S_i-hez közelebbi negyedelőpontja i mindhárom értékére P. A három egyenes valóban egy ponton megy át.

Megjegyzések. 1. A következő gondolatmenettel található ki, hogy a negyedelőpont lesz a közös metszéspont: Ha találunk olyan (p_i,q_i), (p_j,q_j), (p_k,q_k) számpárokat, melyekben a számok összege 1, és teljesül, hogy az $\mathbf{a}_i$, $\dfrac{\mathbf{a}_j+\mathbf{a}_k+\mathbf{k}}{3}$ vektorok p_i-vel és q_i-vel vett lineáris kombinációja megegyezik $\mathbf{a}_j$, $\dfrac{\mathbf{a}_i+\mathbf{a}_k+\mathbf{k}}{3}$ vektorok p_j-vel és q_j-vel vett lineáris kombinációjával, illetve az $\mathbf{a}_k$, $\dfrac{\mathbf{a}_i+\mathbf{a}_j+\mathbf{k}}{3}$ vektorok p_k-val és q_k-val vett lineáris kombinációjával, akkor ez a közös lineáris kombináció mindhárom szakaszra illeszkedik. A $(p_i,q_i)=(p_j,q_j)=(p_k,q_k)=\left(\dfrac{1}{4},\dfrac{3}{4}\right)$ számpárok megfelelőek, a közös lineáris kombináció a szakaszok negyedelőpontja.

2. Többen koordinátageometriával oldották meg a feladatot. Kiszámították például, hogy A_1S_1 és A_2S_2, illetve A_1S_1 és A_3S_3 metszéspontjának koordinátái megegyeznek.

IV. megoldás. A feladat megoldásához hívjuk segítségül a fizikát. Helyezzünk egységnyi, például 1 kg-os tömegű pontszerű testeket az A_1, A_2, A_3, K pontokba. A rendszer helyettesíthető egy P-be, a rendszer tömegközéppontjába helyezett 4 kg-os testtel.

Tekintsük először az A_1, A_2, K pontokat. Ez a rendszer az egyenlő tömegek miatt egy S_3-ba helyezett 3 kg-os testtel helyettesíthető. A rendszer és így az A_3-ba és S_3-ba helyezett testek tömegközéppontja P, és két test tömegközéppontja rajta van a pontok egyenesén, ezért P illeszkedik A_3S_3-ra. Hasonlóan láthatjuk be, hogy P illeszkedik A_2S_2-re és A_1S_1-re is. Ezzel a feladat állítását beláttuk.

Megjegyzés. Még többet is beláthatunk ennek a modellnek a segítségével. Támasszuk alá az A_3S_3 szakaszt. A rendszer pontosan akkor lesz egyensúlyban, ha a tömegközéppontjánál támasztottuk alá. Ekkor lesz a forgatónyomatékok eredője 0. Tehát $A_3P\cdot 1=PS_3\cdot 3$, amiből $\dfrac{A_3P}{PS_3}=3$, tehát P negyedeli az A_3S_3, és hasonlóan az A_2S_2 és az A_1S_1 szakaszt.