I. megoldás. A 100 valós szám mindegyike nem lehet negatív, mivel ekkor összegük is negatív lenne, nem pedig 0. Ha a 100 valós szám között 99 negatív szám van, akkor a 100. szám biztosan pozitív, hiszen csak így lehet a számok összege 0. Ekkor a kéttagú összegek között pontosan 99 pozitív van, mégpedig azok, amelyeknek az egyik tagja a pozitív szám.

A továbbiakban megmutatjuk, hogy a 100 szám között a negatívok számát változtatva nem kaphatunk 99-nél kevesebb kéttagú nemnegatív összeget.

Ha a 100 szám között k db nemnegatív szám van, akkor ezek páronkénti összeadásából $\dfrac{k(k-1)}{2}$ darab (szükségképpen nemnegatív) összeg adódik. Ha $k \geq 15$ ($k \in \mathbb{N}^+$), akkor ez a szám legalább $\dfrac{15 \cdot 14}{2} = 105 > 99$. Így elég a $k \leq 14$ esettel foglalkozni.

Jelöljük a nemnegatív számokat $n_1, n_2, \ldots, n_k$-val, a negatívokat pedig $m_1, m_2, \ldots, m_{100-k}$-val; $k \leq 14$ miatt kevesebb nemnegatív szám van, mint negatív. Azokat a kéttagú összegeket, amelyek egy nemnegatív és egy negatív számból állnak, rendezzük egy $k \times (100-k)$-as táblázatba az alábbi módon:

$$\begin{array}{cccc}
n_1+m_1 & n_1+m_2 & \ldots & n_1+m_{100-k} \\
n_2+m_2 & n_2+m_3 & \ldots & n_2+m_1 \\
\vdots & \vdots & & \\
n_k+m_k & n_k+m_{k+1} & \ldots & n_k+m_{k-1}
\end{array}$$

Ha az azonos oszlopban álló kéttagú összegeket összeadjuk, akkor megkapjuk a nemnegatív és a negatív számok egy részének az összegét. Minden oszlopbeli összeg pozitív, hiszen a 100 szám összege 0, amiből $100-2k$ db negatív tagot elhagyva a visszamaradó összeg pozitív lesz. Így minden oszlopban van legalább egy pozitív kéttagú összeg, vagyis összesen legalább

$$\frac{k(k-1)}{2} + 100 - k = \frac{(k-1{,}5)^2 + 197{,}75}{2}$$

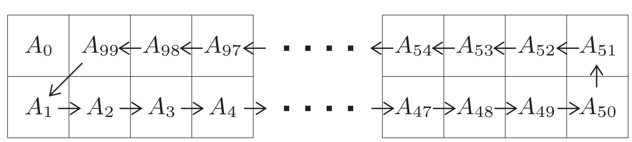
nemnegatív összegünk van. A $0 \leq k \leq 100$, $k \in N$ feltétel esetén a kifejezés $k = 1$ vagy $k = 2$ esetén veszi fel a minimumát, mindkét helyen a minimum értéke 99.

Tehát legalább 99 olyan pár választható ki a 100 számból, amelyben a számok összege nemnegatív.

A továbbiakban arra adunk többféle bizonyítást, hogy a nemnegatív összeget adó párok száma legalább 99.

II. megoldás. Jelöljük a 100 számot $A_0, A_1, \ldots, A_{99}$-cel. Soroljuk őket 99 féle módon 50–50 párba úgy, hogy az egyes besorolásokban lévő párok mindegyike különböző legyen. Ha egy besorolásban az egyes párokban szereplő számok összegét összeadjuk, akkor 0-t kapunk, vagyis biztos van egy számpár ebben a besorolásban, amiben a számok összege nemnegatív. Így mind a 99 besorolásban van egy ilyen pár, és mivel minden pár különböző, azért van legalább 99 ilyen számpár.

A következőkben mutatunk egy konstrukciót a 99 különböző besorolásra, melyben minden pár csak egyszer fordul elő.



Az első besorolást az *ábra* mutatja, az egy oszlopban lévő számok tartoznak egy párba. A következő besorolást úgy kapjuk, hogy az egyes számokat a nyilak mentén eltoljuk eggyel. Minden besorolásból ugyanazen a módon kapjuk a következő besorolást. Egyértelmű, hogy A_0-nak mind a 99 besorolásban más párja lesz (A_1, A_{99}, A_{98}, A_{97}, …, A_4, A_3, végül A_2). Igaz ez A_1-re is, melynek párjai: (A_0, A_{98}, A_{96}, …, A_4, A_2, A_{99}, A_{97}, A_{95}, …, A_5, A_3); illetve igaz lenne akkor is, ha más elem indulna az A_1 pozíciójáról. Mivel pedig a besorolások 99-es ciklusonként ismétlődnek, azért mindegy, hogy melyik besorolást tekintjük elsőnek. Tehát bármely elem indulhatna az A_1 pozíciójáról. Vagyis minden elemre igaz, hogy mind a 99 besorolásban más párt kap.

Tehát legalább 99 olyan pár választható ki, amelyben a számok összege nemnegatív.

Megjegyzés. Néhányan a KöMaL 2006/9. számában megjelent cikkre[1] hivatkoztak a 99-féle párosítás megalkotásakor. (A feladat ugyanabban a számban került kitűzésre.)

III. megoldás. Legyen $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$ a 100 adott szám egy sorrendje úgy, hogy $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \ldots \geq a_{100}$.

Tekintsük az alábbi összegeket: $a_1 + a_{100}$, $a_2 + a_{99}$, …, $a_i + a_{101-i}$, …, $a_{50} + a_{51}$. A fenti 50 kéttagú összeg összege egyben az összes szám összege, vagyis 0. Tehát a kéttagú összegek között van nemnegatív. Legyen $a_x + a_{101-x}$ ($x \in \{1, 2, \ldots, 50\}$) egy ilyen összeg.

[1] Kiss György: *Hogyan szervezzünk körmérkőzéses focibajnokságot?* KöMaL, 2006/9., 514–525.

Azok a kéttagú összegek, melyek egyik tagjának indexe legfeljebb x, másik tagjának indexe pedig legfeljebbb $101-x$, nagyobbak vagy egyenlőek, mint $a_x + a_{101-x}$. Így ezek az összegek szintén nemnegatívok. Számoljuk meg ezeket a számpárokat. Az első tag x-féle, a második tag $(101-x)$-féle lehet. Nem kell számolnunk azokat a párokat, amelyekben ugyanazt a számot választanánk kétszer, és – mivel egyébként kétszer vennénk őket számításba – le kell vonnunk azon pároknak a számát, amelyek mindkét tagjának indexe legfeljebb x. A megfelelő párok száma tehát

$$x(101-x) - x - \frac{x^2-x}{2} = x\left(100 + \frac{1}{2} - \frac{3}{2}x\right).$$

Ennek a kifejezésnek az értéke $x=1$ esetén 99, $x \geq 2$ esetén pedig $100 + \frac{1}{2} - \frac{3}{2}x \geq 50$ miatt legalább 100. Ezek szerint a nemnegatív összegű számpárok száma legalább 99.