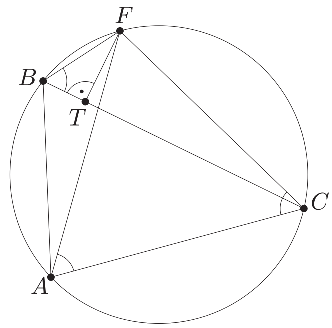
Megoldás. Mindegyik megoldásban azt az esetet vizsgáljuk, amikor $BC > AB$, és így $F \in \widehat{BC}$, tehát $T \in BC$. Ha pedig $BC = AB$, akkor $B = F$, T az AC felezőpontja, így az állítás triviális.

I. megoldás. Mivel F az $\widehat{ABC}$ ív felezőpontja, azért $\widehat{FA} = \widehat{FC}$, és így $FA = FC$. Ebből a kerületi szögek tétele miatt $FAC\sphericalangle = FCA\sphericalangle$, amit jelöljön α. Ebből következik, hogy $AFC\sphericalangle = 180^\circ - 2\alpha$.

Ismét a kerületi szögek tétele miatt $FBC\sphericalangle = FAC\sphericalangle = \alpha$, valamint $ABC\sphericalangle = AFC\sphericalangle = 180^\circ - 2\alpha$, így $ABF\sphericalangle = 180^\circ - \alpha$.



Az AFB háromszögben a koszinusz-tételt felírva kapjuk, hogy:

$$FA^2 = AB^2 + BF^2 - 2 \cdot AB \cdot BF \cdot \cos(180^\circ - \alpha),$$

ahonnan $FC = FA$ miatt

$$FC^2 = AB^2 + BF^2 + 2 \cdot AB \cdot BF \cdot \cos\alpha. \tag{1}$$

A TBF derékszögű háromszögben $\cos\alpha = \dfrac{BT}{BF}$, és így

$$BF \cdot \cos\alpha = BT. \tag{2}$$

A TCF és a BTF derékszögű háromszögekben a Pitagorasz-tétel szerint

$$FC^2 = TC^2 + TF^2, \tag{3}$$

illetve

$$BF^2 = BT^2 + TF^2. \tag{4}$$

A (3), (4) és (2) egyenletek jobb oldalát (1)-ben a megfelelő helyre beírva kapjuk, hogy

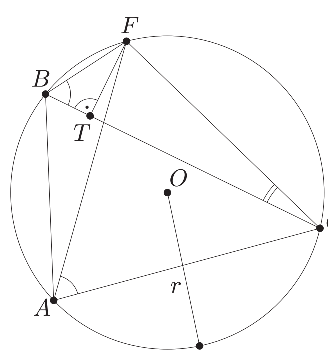
$$TC^2 + TF^2 = AB^2 + BT^2 + TF^2 + 2 \cdot AB \cdot BT,$$

ahonnan

$$TC^2 = AB^2 + 2 \cdot AB \cdot BT + BT^2 = (AB + BT)^2,$$

és így valóban $TC = AB + BT$.

II. megoldás. Jelölje a körív sugarát r, a CBF szöget α, a BCF szöget pedig β.



A feladat feltétele, valamint a kerületi szögek tétele miatt $FBC\sphericalangle = FAC\sphericalangle = FCA\sphericalangle = \alpha$. Tudjuk még, hogy $BCA\sphericalangle = \alpha - \beta$. Ezek alapján:

$$FC = 2r\sin\alpha, \quad FB = 2r\sin\beta,$$
$$BA = 2r\sin(\alpha-\beta).$$

Ezt felhasználva a CTF derékszögű háromszögben

$$CT = FC\cdot\cos\beta = 2r\cdot\sin\alpha\cos\beta,$$

illetve a BTF derékszögű háromszögben

$$BT = FB\cdot\cos\alpha = 2r\cos\alpha\sin\beta.$$

Azt szeretnénk bebizonyítani, hogy $CT = \dfrac{CB+BA}{2}$. Mivel $BC = CT + TB$, ez az egyenlőség ekvivalens a következővel: $CT = TB + BA$. A három szakasz hosszára kapott kifejezéseket az egyenlőségbe behelyettesítve kapjuk, hogy:

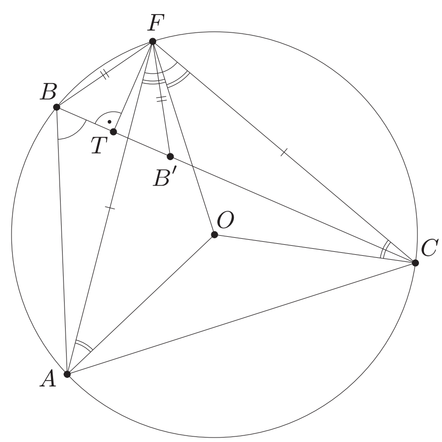
$$2r\sin\alpha\cos\beta = 2r\cos\alpha\sin\beta + 2r\sin(\alpha-\beta),$$

vagyis

$$\sin\alpha\cos\beta = \cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta,$$

ami azonosság. Mivel a helyettesítés során is ekvivalens lépést végeztünk, ezzel bebizonyítottuk, hogy $CT = \dfrac{CB+BA}{2}$.

III. megoldás. A feladat szerint $\widehat{ABF} = \widehat{FC}$, ezért $AF = FC$. Az AOC szöget 2α-val jelölve a kerületi szögek tétele szerint $AFC\sphericalangle = ABC\sphericalangle = \alpha$. Az $ACF\triangle$ egyenlő szárú, ezért FO felezi az AFC szöget, azaz $AFO\sphericalangle = OFC\sphericalangle = \dfrac{\alpha}{2}$.



Tükrözzük a B pontot a T pontra, a kapott pont legyen B'. Ekkor a $BB'F\triangle$ egyenlő szárú, így $BF = B'F$ és $FBB'\sphericalangle = FB'B\sphericalangle$.

Azt kell bizonyítani, hogy $AB+BT = TB'+B'C$. A tükrözés miatt $BT = B'T$, ezért elég belátni, hogy $AB = B'C$.

Az ACO háromszög egyenlő szárú az $AO = OC$ miatt, így

$$OAC\sphericalangle = OCA\sphericalangle = \frac{180^\circ - 2\alpha}{2} = 90^\circ - \alpha.$$

Az FAO háromszög is egyenlő szárú, $FO = OA$, tehát

$$OFA\sphericalangle = FAO\sphericalangle = \frac{\alpha}{2}.$$

Innen

$$FAC\sphericalangle = FAO\sphericalangle + OAC\sphericalangle = 90^\circ - \alpha + \frac{\alpha}{2} = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}.$$

A kerületi szögek tétele és az eddigiek miatt:

$$90^\circ - \frac{\alpha}{2} = FAC\sphericalangle = FBC\sphericalangle = FBB'\sphericalangle = FB'B\sphericalangle,$$

és így

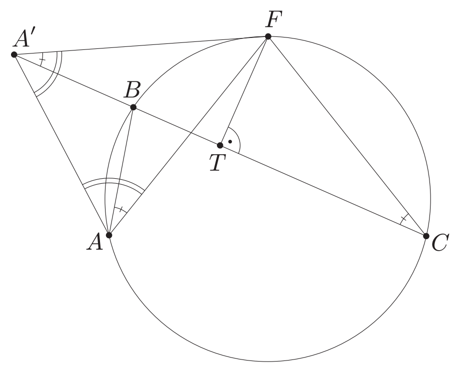
$$FB'C\sphericalangle = 180^\circ - FB'B\sphericalangle = 90^\circ + \frac{\alpha}{2},$$

$$ABF\sphericalangle = \alpha + \left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}.$$

Mivel $AF = CF$, $BF = B'F$ és $ABF\sphericalangle = FB'C\sphericalangle = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}$, a $B'CF$ és a BAF háromszögeknek megegyezik két oldala és a nagyobbikkal szemközti szöge, tehát a két háromszög egybevágó. Ebből következik, hogy a harmadik oldaluk is egyenlő, vagyis $AB = B'C$.

Ezzel az állítást beláttuk.

IV. megoldás. Mivel F az AC körív felezőpontja, azért $FA = FC$. Forgassuk el F körül az A pontot úgy, hogy a kapott A' pont a BC szakasz által meghatározott egyenesre kerüljön. A forgatás távolságtartó, ezért $FA = FA'$. A két egyenlőséget egybevetve $FC = FA'$, tehát az $A'CF\triangle$ egyenlő szárú és $A'CF\sphericalangle = CA'F\sphericalangle$. Jelölje ezt a szöget α. A kerületi szögek tétele miatt $BAF\sphericalangle = BCF\sphericalangle = \alpha$. Az $AA'F\triangle$ egyenlő szárú, mert $FA = FA'$. A háromszögben $AA'F\sphericalangle = A'AF\sphericalangle$. Jelölje ezt a szöget β.



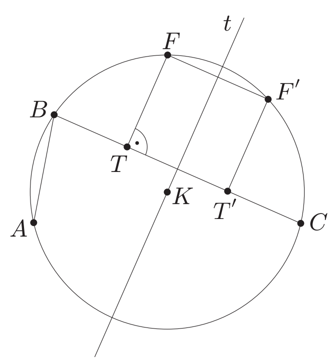
Ekkor $BA'A\sphericalangle = \beta - \alpha$, és $A'AB\sphericalangle = \beta - \alpha$, ezért az $ABA'\triangle$ egyenlő szárú és így $AB = A'B$. Ez azt jelenti, hogy a töröttvonal hossza $A'C$, mert $A'C = A'B + BC$, és $A'B = AB$.

Az $A'CF\triangle$ egyenlő szárú, tehát FT felezi az alapját, $A'C$-t.

Ezzel beláttuk, hogy a T pont felezi a töröttvonal hosszát.

V. megoldás. Jelölje a BC szakasz felező merőlegesét t. Tükrözzük az F és a T pontot t-re, a tükörképek legyenek rendre F' és T'.

A $TT'F'F$ négyszög egy derékszögű, szimmetrikus trapéz, vagyis egy téglalap. Ebből következik, hogy $TT' = FF'$.



A tükrözés miatt $BT = CT'$ és $\widehat{BF} = \widehat{CF'}$. Mivel F az $\widehat{ABC}$ ív felezőpontja, $\widehat{AF} = \widehat{CF}$. Így $\widehat{AF} - \widehat{BF} = \widehat{CF} - \widehat{CF'}$, vagyis $\widehat{AB} = \widehat{FF'}$. Egy körben egyenlő hosszúságú ívekhez egyenlő hosszúságú húrok tartoznak, ezért $AB = FF'$.

A fentiek alapján $AB + BT = FF' + CT' = TT' + CT' = CT$, vagyis valóban egyenlőek a megfelelő szakaszok.

Megjegyzés. Ez a feladat már Eukleidész *Elemek* című művében is szerepelt.