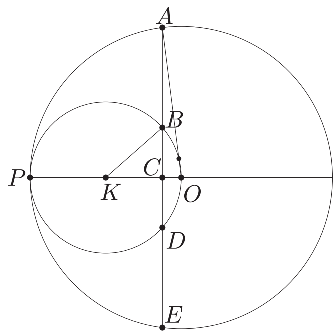
I. megoldás. Használjuk az *1. ábra* jelöléseit. Legyen a feltételeknek megfelelő húr hossza $3x = AE$, távolsága a nagyobbik kör O középpontjától $y = CO$. Legyen a nagy kör sugara r, a kis kör sugara ekkor $\frac{1}{2}r$.



1. ábra

Tudjuk, hogy $AB = BD = DE$, $BC = \frac{1}{2}BD$, és így $AC = 3BC$. A BKC háromszögre felírva Pitagorasz tételét:

(1)
$$BC^2 = BK^2 - CK^2,$$

$$BC = \sqrt{\left(\frac{1}{2}r\right)^2 - \left(\frac{1}{2}r - y\right)^2}.$$

Az AOC háromszögre felírva a Pitagorasz-tételt:

(2)
$$AC^2 = AO^2 - CO^2, \quad AC = \sqrt{r^2 - y^2}.$$

Az $AC = 3BC$ egyenlőségbe (1) és (2) jobb oldalát beírva, majd négyzetre emelve:

$$r^2 - y^2 = 9\left[\frac{1}{4}r^2 - \left(\frac{1}{4}r^2 - ry + y^2\right)\right], \quad \text{ahonnan} \quad -8y^2 + 9ry - r^2 = 0.$$

Ezt y-ra megoldva:

$$y_{1,2} = \frac{-9r \pm 7r}{-16}, \qquad y_1 = \frac{1}{8}r, \qquad y_2 = r.$$

Az y_2 nem megoldás, hiszen ekkor a „húr” a két kör érintkezési pontja lenne.

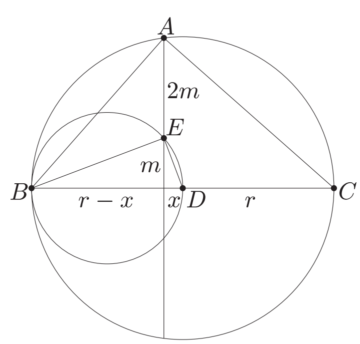
Tehát a keresett húr a PO szakaszra az O-hoz közelebbi nyolcadoló pontjában emelt merőleges.

II. megoldás. Jelöljük a körök által a keresett egyenesből levágott egyenlő hosszúságú részek hosszát $2m$-mel.

A *2. ábrán* látható ABC és BDE háromszögek Thalész tétele alapján derékszögűek. A derékszögű háromszögeket az átfogóhoz tartozó magasság hasonló háromszögekre osztja, s így adódik, hogy az átfogóhoz tartozó magasság négyzete egyenlő az alap két részének szorzatával. Ezt a fenti két háromszögre alkalmazva $x(r-x) = m^2$ és $(r+x)(r-x) = (3m)^2$. Az első egyenlet 9-szeresét behelyettesítve a második jobb oldalába:

$$r^2 - x^2 = 9x(r - x), \quad \text{innen} \quad 8x^2 - 9rx + r^2 = 0.$$

Ennek megoldásai $x = r$ és $x = \frac{r}{8}$, de a kettőből most is csak az utóbbi megfelelő.

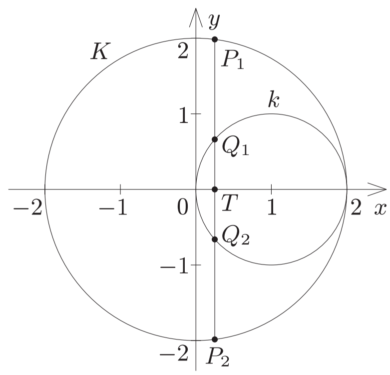


2. ábra

Az egyenest tehát a nagy kör középpontjától a sugara $\frac{1}{8}$-ánál kell meghúznunk. A nyolcadolás szakaszfelezésekkel megoldható.

Megjegyzés. A használt tétel az ún. magasságtétel. Ugyanezekkel az egyenletekkel kell számolni, ha valaki a körhöz belső pontból húzott szelőszakaszokra vonatkozó tételt használja fel.

III. megoldás. Legyen a K kör sugara R, a k köré pedig r. Helyezzük el a köröket egy olyan koordinátarendszerben a *3. ábrának* megfelelően, amelyben $R = 2$. K középpontja az origó, k középpontja az $(1;0)$ pont, a körök középpontjára illeszkedő egyenes az x tengely. A keresett húr erre merőleges, egyenlete tehát $x = x_0$ alakú, ahol $0 < x_0 < 2$. Végpontjai legyenek P_1 és P_2, a k körrel alkotott metszéspontok Q_1 és Q_2, az x tengellyel vett metszéspont pedig T. Tudjuk, hogy Q_1 és Q_2 a P_1P_2 szakasz harmadolópontjai, T felezi a Q_1Q_2 szakaszt, így $3TQ_1 = TP_1$.



3. ábra

Írjuk fel a két kör egyenletét, majd a fenti egyenlőséget felhasználva számoljuk ki Q_1 és P_1 közös abszcisszáját, amiről tudjuk, hogy pozitív.

K egyenlete $x^2 + y^2 = 4$, ahonnan $y = \sqrt{4 - x^2}$.

k egyenlete $(x-1)^2 + y^2 = 1$, amiből $y = \sqrt{-x^2 + 2x}$.

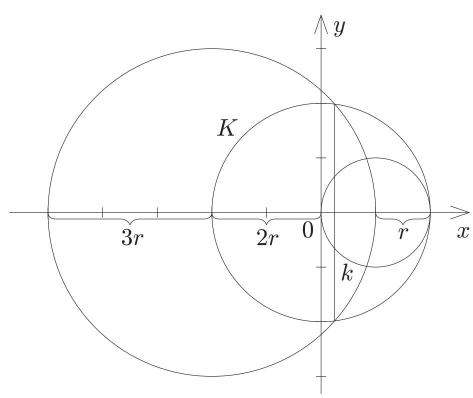
Azt az x_0 számot keressük, amelyre $3 \cdot \sqrt{-x_0^2 + 2x_0} = \sqrt{4 - x_0^2}$.

Négyzetre emelve és rendezve:

$$4x_0^2 - 9x_0 + 2 = 0. \tag{1}$$

Az egyenlet megoldása a 2 és az $\frac{1}{4}$, de csak az utóbbi megfelelő. Tehát $x_0 = \frac{1}{4}$.

Megjegyzés. Van egy további, igen meglepő szerkesztés is, amit a *4. ábra* mutat.



4. ábra

A $3r$ sugarú kör, melynek középpontja a két adott kör középpontját összekötő egyenes és K metszéspontja, kimetszi K-ból a keresett húr két végpontját. Valóban: a kör egyenlete az előző koordináta-rendszerben: $(x+2)^2 + y^2 = 9$, és a K kör $x^2 + y^2 = 4$ egyenletéből:

$$P_1\left(\frac{1}{4}, \sqrt{4 - \frac{1}{16}}\right) = P_1\left(\frac{1}{4}, \sqrt{\frac{63}{16}}\right),$$

ami kielégíti az (1) kör egyenletét.