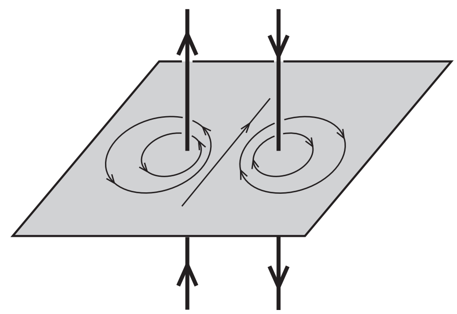
Megoldás. A *3. ábra* a két párhuzamos vezető által létesített mágneses tér néhány indukcióvonalát szemlélteti, amikor a vezetőkön egyenlő nagyságú, de ellentétes irányú áramok haladnak át.



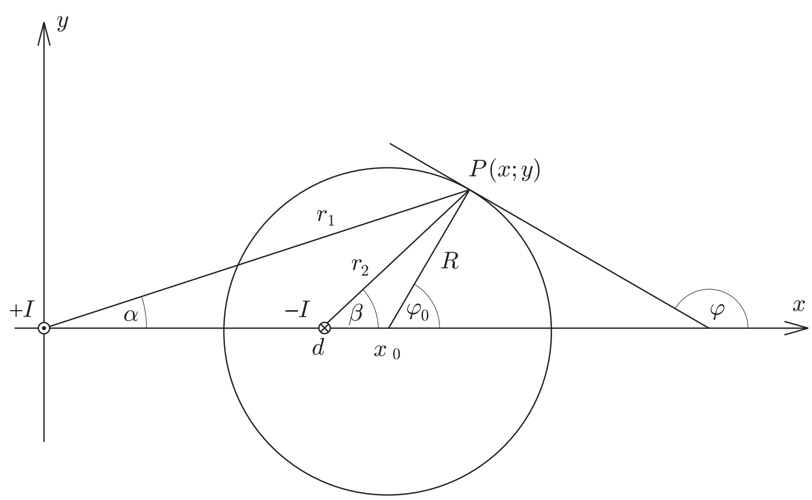
3. ábra

A speciális árameloszlás miatt a létrejövő mágneses mező nagymérvű szimmetriát mutat: az egyik és másik áramvezetőt körülölelő indukcióvonalak nemcsak egymás tükörképei, de akármelyik zárt görbe, amely mentén egy indukcióvonal halad, szimmetrikus a két áramvezetőn átfektetett síkra is. Ettől persze még lehetnek ellipszisek, körök vagy magasabb rendű zárt görbék is az indukcióvonalak, de ha van köztük kör, akkor annak a középpontja benne kell legyen az áramvezetőkön átfektetett síkban.

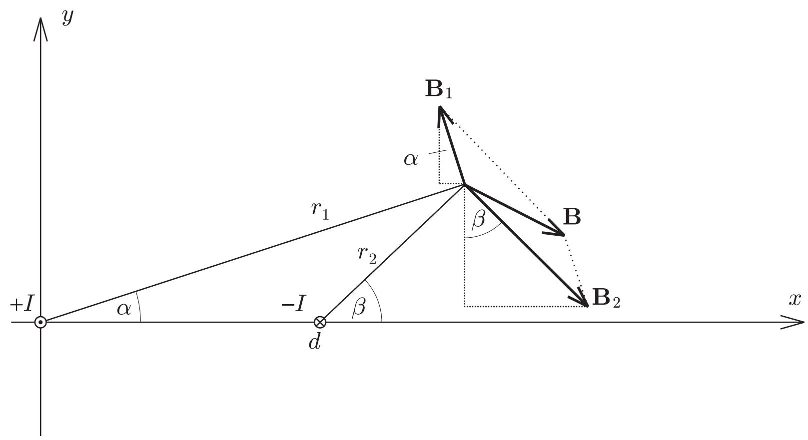
Vegyünk fel a kiválasztott síkban egy $(x; y)$ koordináta-rendszert úgy, hogy az egyik áram az origón, a másik pedig a $(d; 0)$ ponton döfje át a síkot. A síkban kiválasztott $P(x; y)$ ponton átmenő körök közül tehát csak azok jöhetnek szóba indukcióvonalként, amelyek középpontja rajta van az x tengelyen. Egy ilyen kör középpontja legyen az $(x_0; 0)$ pont. A kör egyenlete ekkor

$$(x - x_0)^2 + y^2 = R^2,$$

ahol R d-től és x_0-tól függő mennyiség.



4. ábra



5. ábra

Ha ez a kör indukcióvonal, akkor az indukcióvektor állása a kör bármely pontjában megegyezik az ottani érintő állásával (*4. ábra*). A $P(x;y)$ ponton átmenő érintő iránytangense:

$$\operatorname{tg}\varphi = -\frac{1}{\operatorname{tg}\varphi_0} = -\frac{1}{\dfrac{y}{x-x_0}} = -\frac{x-x_0}{y}.$$

Ezt kell majd összevetnünk a P pontbeli indukcióvektoron átfektetett egyenes iránytangensével. Az eredő $\mathbf{B}$ iránytangense (*5. ábra*):

$$\operatorname{tg}\varphi_B = \frac{B_y}{B_x} = \frac{B_{1y}+B_{2y}}{B_{1x}+B_{2x}}.$$

Határozzuk meg ezt a mennyiséget! Egyetlen egyenes vezető által keltett indukcióvektor nagysága:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\cdot\frac{1}{r}.$$

Ennek és az *5. ábráról* leolvasható geometriai összefüggéseknek a felhasználásával az egyes összetevők:

$$B_{1y} = B_1\cos\alpha = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\cdot\frac{\cos\alpha}{r_1} = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\cdot\frac{x}{r_1^2},$$

$$B_{2y} = -B_2\cos\beta = -\frac{\mu_0 I}{2\pi}\cdot\frac{\cos\beta}{r_2} = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\cdot\frac{(d-x)}{r_2^2},$$

$$B_{1x} = -B_1\sin\alpha = -\frac{\mu_0 I}{2\pi}\cdot\frac{\sin\alpha}{r_1} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi}\cdot\frac{y}{r_1^2},$$

$$B_{2x} = B_2\sin\beta = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\cdot\frac{\sin\beta}{r_2} = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\cdot\frac{y}{r_2^2}.$$

Helyettesítsük be ezeket a kifejezéseket a $\operatorname{tg}\varphi_B$-re felírt összefüggésbe! Egyszerűsítés után:

$$\operatorname{tg}\varphi_B = \frac{\dfrac{x}{r_1^2}+\dfrac{d-x}{r_2^2}}{-\dfrac{y}{r_1^2}+\dfrac{y}{r_2^2}} = \frac{x\left(\dfrac{1}{r_1^2}-\dfrac{1}{r_2^2}\right)+\dfrac{d}{r_2^2}}{-y\left(\dfrac{1}{r_1^2}-\dfrac{1}{r_2^2}\right)} = -\frac{x-\dfrac{d}{1-(r_2/r_1)^2}}{y}.$$

Ez a kifejezés akkor és csak akkor egyenlő a korábban kapott

$$\operatorname{tg}\varphi = -\frac{x-x_0}{y}$$

képlettel, ha

$$x_0 = \frac{d}{1-(r_2/r_1)^2}.$$

Behelyettesítve az $r_2 = \sqrt{y^2+(x-d)^2}$ és $r_1 = \sqrt{y^2+x^2}$ kifejezéseket, rendezés után a következőt kapjuk: $(x-x_0)^2 + y^2 = x_0(x_0-d)$. Ez pedig pontosan a megadott P ponton is átmenő, $(x_0;0)$ középpontú kör egyenlete, vagyis ez az indukcióvonal *kör alakú!* Megkaptuk a kör sugarát is:

$$R = \sqrt{x_0(x_0-d)}.$$

Íme, ebben a mágneses mezőben minden indukcióvonal kör alakú, hiszen P a tér tetszőleges pontja lehet. Egy ponton csak egyetlen indukcióvonal mehet át, az pedig kör alakú.

Megjegyzések. 1. A síkban azoknak a pontoknak a mértani helye, melyek két adott ponttól vett távolságainak *aránya* állandó, az ún. Apollóniosz-kör. Eredményeinket úgy is megfogalmazhatjuk, hogy a vizsgált mágneses térben *az indukcióvonalak Apollóniosz-körök.*

Bevezetve az $r_2/r_1 = \lambda$ jelölést, e körök egyenlete

$$\left(x-\frac{d}{1-\lambda^2}\right)^2 + y^2 = \left(\lambda\frac{d}{1-\lambda^2}\right)^2,$$

amiből többek között az $R = \lambda x_0$ érdekes összefüggés is leolvasható. (Apollóniosz időszámításunk kezdete előtt 262-től 190-ig élt; a kúpszeletekről írt munkájában ő vezette be az ellipszis, parabola és hiperbola kifejezéseket.)

2. Ha csak kicsit is általánosabb esetet vizsgálunk, a számolás meglehetősen elbonyolódik, és soha többé nem kapunk kör alakú indukcióvonalakat. Érdemes lenne számítógépes szimulációval meghatározni az ellentétes irányú, de nem egyenlő nagyságú áramok keltette mágnestér indukcióvonalait, hiszen erre $r \ll d$ esetén (az egyik áram közvetlen közelében) ugyanúgy, mint $r \gg d$ esetén (ahonnan a két áram már egyetlen $|I_1 - I_2|$ nagyságú áramnak látszik) az indukcióvonalak egyre jobban hasonlítanak a körhöz. De milyen furcsa görbék jöhetnek ki közben?