I. megoldás. Legyenek a P csúccsal szomszédos csúcsok A, B és C. Az $ABCP$ tetraédernek a térfogata:

$$V_{ABCP} = \frac{abc}{6}.$$

A tetraéder térfogatát másképpen is kiszámíthatjuk, az ABC háromszög területéből és a hozzá tartozó $PM = m$ magasságból:

$$V_{ABCP} = \frac{Tm}{3}, \quad \text{vagyis} \quad V_{ABCP}^2 = \frac{T^2m^2}{9}.$$

A terület négyzetét a Héron-képlet segítségével kifejezve és átalakítva:

$$\begin{aligned} T^2 &= \frac{1}{16}(x+y+z)(x+y-z)(x+z-y)(y+z-x) = \\ &= \frac{1}{16}\big((x+y)^2 - z^2\big)\big(z^2 - (x-y)^2\big) = \\ &= \frac{1}{16}(x^2+2xy+y^2-z^2)(z^2-x^2-y^2+2xy) = \frac{1}{16}\big(4x^2y^2 - (x^2+y^2-z^2)^2\big). \end{aligned}$$

A Pitagorasz-tétel szerint az oldalak: $x^2 = a^2 + b^2$, $y^2 = a^2 + c^2$, $z^2 = b^2 + c^2$, amiből

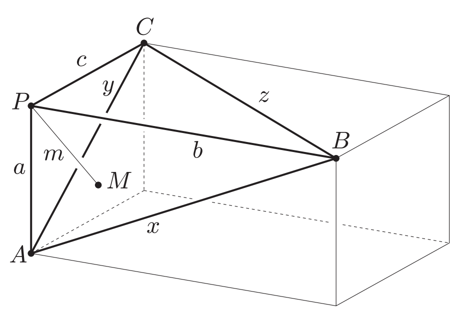
$$T^2 = \frac{1}{16}\big(4(a^2+b^2)(a^2+c^2) - 4a^4\big) = \frac{1}{4}(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2).$$

Tehát

$$m^2 = \frac{V_{ABCP}^2}{\frac{T^2}{9}} = \frac{9\frac{a^2b^2c^2}{36}}{\frac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}{4}} = \frac{a^2b^2c^2}{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2},$$

innen pedig

$$\frac{1}{m^2} = \frac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}{a^2b^2c^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$

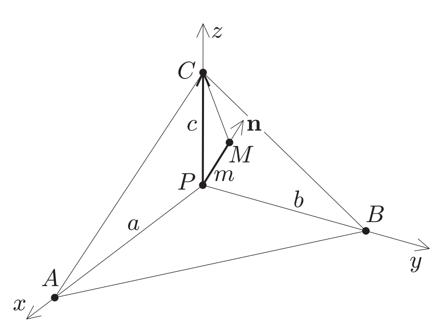


II. megoldás. Vegyünk fel egy derékszögű koordinátarendszert úgy, hogy a P pont az origóban legyen, a P-vel szomszédos csúcsok pedig rendre legyenek $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$. Ekkor a sík tengelymetszetes egyenlete:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1,$$

ezt abc-vel beszorozva:

$$bc \cdot x + ac \cdot y + ab \cdot z = abc.$$



Ezt összevetve a sík $n_1x + n_2y + n_3z = d$ normálvektoros egyenletével látható, hogy a sík egy normálvektora $\mathbf{n} = (bc; ac; ab)$. Az egységnyi hosszú normálvektort pedig úgy kapjuk, ha ezt a vektort elosztjuk a saját hosszával:

$$\overline{\mathbf{n}_e} = \frac{\overline{\mathbf{n}}}{\sqrt{b^2c^2 + a^2c^2 + a^2b^2}}.$$

Az m távolságot megkaphatjuk $\overrightarrow{PC} = (0; 0; c)$ és $\mathbf{n}_e$ skalárszorzataként:

$$M = \overrightarrow{PC} \cdot \mathbf{n}_e = \frac{0 \cdot bc + 0 \cdot ac + c \cdot ab}{\sqrt{b^2c^2 + a^2c^2 + a^2b^2}} = \frac{abc}{\sqrt{b^2c^2 + a^2c^2 + a^2b^2}},$$

amiből

$$m^2 = \frac{a^2b^2c^2}{b^2c^2 + a^2c^2 + a^2b^2},$$

vagyis

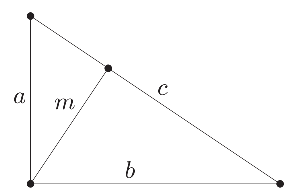
$$\frac{1}{m^2} = \frac{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}{a^2b^2c^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$

III. megoldás. Derékszögű háromszögben az átfogóhoz tartozó magasságról könnyen belátható, hogy

$$\frac{1}{m^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}.$$

Ugyanis $a^2b^2 = c^2m^2 = 4T^2$ miatt

$$\frac{1}{m^2} = \frac{c^2}{a^2b^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2b^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{a^2}.$$



Alkalmazzuk ezt az összefüggést először az APC, majd a BPN derékszögű háromszögben:

$$\frac{1}{n^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{c^2}, \qquad \frac{1}{m^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{n^2},$$

ahonnan

$$\frac{1}{m^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$